МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

О.Б. Ахієзер, О.А. Геляровська, О.І. Дунаєвська,
О.А. Галуза, Н. В. Москалець

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ЗА ТЕМОЮ «РЯДИ»

з вищої математики для студентів
заочної та дистанційної форм навчання

Затверджено
редакціоно-видавничою
радою університету,
протокол № 2 від 25.06.2015 р.

Харків
НТУ «ХПІ»
2016

Методичні вказівки до індивідуальних завдань за темою «Ряди» з вищої математики для студентів заочної та дистанційної форм навчання : навч. посіб. / укл. О. Б. Ахієзер, О. А. Геляровська, О. І. Дунаєвська, О. А. Галуза, Н. В. Москалець – Х. : НТУ «ХПІ», 2016. – 88 с.

Укладачі: О. Б. Ахієзер
О. А. Геляровська
О. І. Дунаєвська
О. А. Галуза
Н. В. Москалець

Рецензент: Г. Н. Жолткевич

Автори: О. Б. Ахієзер, О. А. Геляровська, О. І. Дунаєвська, О. А. Галуза, Н. В. Москалець

Кафедра комп'ютерної матерматики та математичного моделювання

ЗМІСТ

ВСТУП

Останні роки в технічних університетах відбуваються зрушення у методиці викладання вищої математики, яку намагаються наблизити до інженерних дисциплін та ліквідувати відстань між абстрактними математичними теоріями і прикладними задачами через тлумачення формальних теорій в категоріях реальних завдань. Особливо гострою є проблема актуалізації складу заочної та дистанційної математичної освіти, де відсутній постійний контакт студента з викладачем. Тому актуальним стало створення нового методичного забезпечення, яке б відповідало цим трендам.

Методичні вказівки входять до складу серії посібників «Вища математика. Практичний курс для студентів технічних спеціальностей заочної та дистанційної форм навчання».

Пропоновані методичні вказівки містять приклади розв’язання типових задач і вправ, виконання яких сприяє засвоєнню фундаментальних понять вищої математики. Мінімально необхідна кількість теорії та велика кількість прикладів відповідає особливостям самостійного навчання. Досить дрібне розбиття на теми дозволяє використовувати його з різними навчальними програмами та при побудові індивідуальних траєкторій навчання.

РЯДИ

1. Числові ряди

1.1. Числові ряди. Основні поняття і визначення

Нехай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числова послідовність. Числовим рядом називається вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots , \tag{1.1}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – члени ряду, a_n – загальний член ряду. Для того щоб задати числовий ряд, достатньо задати a_n, наприклад, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$.

Частковою сумою числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається сума його перших *n* доданків:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k . \tag{1.2}$$

Якщо існує границя $\lim_{n\to\infty} S_n = S \neq \infty$, то числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається збіжним, а число S – його сумою: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Якщо границя $\lim_{n\to\infty} S_n$ не існує або є нескінченною $\left(\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty\right)$, то числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається розбіжним. Тобто,

$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \neq \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ збіжний числовий ряд;

$\nexists \lim_{n\to\infty} S_n$ або $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний числовий ряд.

Якщо в ряді (1.1) відкинути перші n членів, то отримаємо ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... = S - S_n = R_n \,, \qquad (1.3)$$

який називається залишком ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

***Приклад* 1.1.** Показати, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7}{49n^2 + 7n - 12}$ збігається і знайти його суму.

Розв'язання. Розглянемо загальний член ряду $a_n = \dfrac{7}{49n^2 + 7n - 12}$ як раціональний дріб. Цей дріб можливо зобразити у вигляді суми найпростіших дробів. Для цього спочатку розкладемо знаменник $\left(49n^2 + 7n - 12\right)$ на найпростіші множники:

$$49n^2 + 7n - 12 = 0 \quad \left(an^2 + bn + c = 0\right);$$

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 49 \cdot \left(-12\right) = 49 + 2352 = 2401,$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{2401} = 49\,;$$

$$n_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 + 49}{2 \cdot 49} = \frac{42}{98} = \frac{3}{7},$$

$$n_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 - 49}{2 \cdot 49} = -\frac{56}{98} = -\frac{4}{7}\,;$$

$$49n^2 + 7n - 12 = 49\left(n - \frac{3}{7}\right)\left(n + \frac{4}{7}\right) = \left(7n - 3\right)\left(7n + 4\right).$$

В результаті загальний член ряду можна перетворити в різницю двох найпростіших дробів:

$$a_n = \frac{7}{49n^2 + 7n - 12} = \frac{7}{\left(7n - 3\right)\left(7n + 4\right)} = \frac{\left(7n + 4\right) - \left(7n - 3\right)}{\left(7n - 3\right)\left(7n + 4\right)} =$$

$$= \frac{(7n+4)}{(7n-3)(7n+4)} - \frac{(7n-3)}{(7n-3)(7n+4)} = \frac{1}{7n-3} - \frac{1}{7n+4}.$$

Також, раціональний дріб у вигляді найпростіших дробів можна було отримати інакше, використовуючи розклад з невизначеними коефіцієнтами:

$$a_n = \frac{7}{49n^2+7n-12} = \frac{7}{(7n-3)(7n+4)} = \frac{A}{7n-3} + \frac{B}{7n+4}.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти A і B:

$$\frac{7}{(7n-3)(7n+4)} = \frac{A}{7n-3} + \frac{B}{7n+4} = \frac{A(7n+4)+B(7n-3)}{(7n-3)(7n+4)},$$

$$7 = A(7n+4) + B(7n-3),$$

якщо $n = \frac{3}{7}$, то $7 = 7A$ або $A = 1$;

якщо $n = -\frac{4}{7}$, то $7 = -7B$ або $B = -1$.

Тепер загальний член ряду має вигляд

$$a_n = \frac{7}{49n^2+7n-12} = \frac{1}{7n-3} - \frac{1}{7n+4}.$$

Тобто,

$n=1$: $a_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{11}$,

$n=2$: $a_2 = \frac{1}{11} - \frac{1}{18}$,

$n=3$: $a_3 = \frac{1}{18} - \frac{1}{25}$,

$n=4$: $a_4 = \frac{1}{25} - \frac{1}{32}$,

....

……………………………

$$(n-3): \qquad a_{n-3}=\frac{1}{7(n-3)-3}-\frac{1}{7(n-3)+4}=$$

$$=\frac{1}{7n-21-3}-\frac{1}{7n-21+4}=\frac{1}{7n-24}-\frac{1}{7n-17},$$

$$(n-2): \qquad a_{n-2}=\frac{1}{7(n-2)-3}-\frac{1}{7(n-2)+4}=$$

$$=\frac{1}{7n-14-3}-\frac{1}{7n-14+4}=\frac{1}{7n-17}-\frac{1}{7n-10},$$

$$(n-1): \qquad a_{n-1}=\frac{1}{7(n-1)-3}-\frac{1}{7(n-1)+4}=$$

$$=\frac{1}{7n-7-3}-\frac{1}{7n-7+4}=\frac{1}{7n-10}-\frac{1}{7n-3},$$

$$n: \qquad a_n=\frac{1}{7n-3}-\frac{1}{7n+4}.$$

Враховуючи, що часткова сума ряду дорівнює

$$S_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n,$$

маємо:

$$S_n=\boxed{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{11}}+\cancel{\frac{1}{11}}-\cancel{\frac{1}{18}}+\cancel{\frac{1}{18}}-\cancel{\frac{1}{25}}+\cancel{\frac{1}{25}}-\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{7n-24}-\cancel{\frac{1}{7n-17}}+$$

$$+\cancel{\frac{1}{7n-17}}-\cancel{\frac{1}{7n-10}}+\cancel{\frac{1}{7n-10}}-\cancel{\frac{1}{7n-3}}+\cancel{\frac{1}{7n-3}}\boxed{-\frac{1}{7n+4}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{7n+4}.$$

Отже,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7n+4}\right)=\left\|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{7n+4}=0\right\|=\frac{1}{4},$$

тобто, даний ряд збігається, і його сума дорівнює $\frac{1}{4}$.

***Приклад* 1.2.** Показати, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+4^n}{28^n}$ збігається і знайти його суму.

Розв'язання. Зобразимо ряд у вигляді суми двох числових рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+4^n}{28^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7^n}{28^n}+\frac{4^n}{28^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}+\frac{1}{7^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}=$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ldots+\frac{1}{7^n}+\ldots\right).$$

Складемо n-ю часткову суму для кожного ряду:

$$S_n^{(1)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^n},$$

$$S_n^{(2)}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ldots+\frac{1}{7^n},$$

відповідно, $$S_n=S_n^{(1)}+S_n^{(2)}.$$

Кожний з доданків часткових сум $S_n^{(1)}$ і $S_n^{(2)}$ являє собою суму членів нескінченної спадної геометричної прогресії: для $S_n^{(1)}$ перший член геометричної прогресії дорівнює $b_1=\frac{1}{4}$, знаменник $q=\frac{1}{4}$; для $S_n^{(2)}$, відповідно, $b_1=\frac{1}{7}$, $q=\frac{1}{7}$.

Слід мати на увазі, що сума n елементів геометричної прогресії обчислюється за формулою:

$$S_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}. \tag{1.4}$$

Використовуючи дану формулу, знайдемо суму кожного з доданків, тобто часткових сум $S_n^{(1)}$ і $S_n^{(2)}$:

$$S_n^{(1)} = \frac{\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1-\frac{1}{4^n}}{4\cdot\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right),$$

$$S_n^{(2)} = \frac{\frac{1}{7}\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{7}} = \frac{1-\frac{1}{7^n}}{7\cdot\frac{6}{7}} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{7^n}\right).$$

В результаті маємо:

$$S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) + \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{7^n}\right).$$

Отже,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) + \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\right] =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \text{при } n\to\infty: \frac{1}{4^n}\to 0 \\ \text{при } n\to\infty: \frac{1}{7^n}\to 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

тобто, даний ряд збігається, і його сума дорівнює $\frac{1}{2}$.

1.2. Ознаки збіжності числових рядів

1.2.1. Необхідна ознака збіжності рядів

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то його загальний член наближається до нуля, тобто $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Отже, якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається. Таким чином,

1) якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \;\Rightarrow\;$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається (це є достатньою ознакою розбіжності для будь-якого ряду);

2) якщо $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;\Rightarrow\;$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ може збігатися, а може розбігатися (це необхідна, але не достатня ознака збіжності для будь-якого ряду).

1.2.2. Властивості збіжних рядів

1) Числовий ряд і будь-який з його залишків збігаються або розбігаються одночасно.

2) Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, і його сума дорівнює S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n$, де $C \neq 0$ $\left(C = \text{const}\right)$, також збігається, і його сума дорівнює $C \cdot S$.

3) Якщо числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються, і їхні суми дорівнюють S_1, S_2, відповідно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + b_n\right)$ також збігається, і його сума дорівнює $S_1 + S_2$.

4) Якщо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбігається, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + b_n\right)$ розбігається.

***Приклад* 1.3.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n-2}{7n+4}$.

Розв'язання. Випишемо загальний член ряду: $a_n=\dfrac{3n-2}{7n+4}$.

Знайдемо границю загального члена ряду:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{7n+4}=\left\|\begin{matrix}3n-2\underset{n\to\infty}{\sim}3n\\7n+4\underset{n\to\infty}{\sim}7n\end{matrix}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{7n}=\frac{3}{7}\neq 0\quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{7n+4}\quad(\longleftrightarrow).$$

Даний ряд розбігається за достатньою ознакою розбіжності (границя загального члена ряду відмінна від нуля).

Зауваження.

Якщо ряд складається з раціональних дробів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\ldots+a_{m-1}n+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\ldots+b_{k-1}n+b_k},$$

де старші степені многочленів є рівними, або старший степінь у чисельнику більший за старший степінь у знаменнику $(m\geq k)$, то даний ряд, за достатньою ознакою розбіжності, розбігається.

***Приклад* 1.4.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{9^n}{3^{2n+1}+n^2}$.

Розв'язання. Випишемо загальний член ряду: $a_n=\dfrac{9^n}{3^{2n+1}+n^2}$.

Знайдемо границю загального члена даного ряду:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9^n}{3^{2n+1}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n}}{3^{2n}\cdot 3+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{3^{2n}}}{\cancel{3^{2n}}\left(3+\dfrac{n^2}{3^{2n}}\right)}=$$

$$=\left\| \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3^{2n}}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n^2\right)'}{\left(3^{2n}\right)'}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{3^{2n}\cdot 2\ln 3}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|= \\ =\dfrac{1}{\ln 3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n)'}{\left(3^{2n}\right)'}=\dfrac{1}{\ln 3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^{2n}\cdot 2\ln 3}=0\Rightarrow\dfrac{n^2}{3^{2n}}\to 0 \end{array}\right\|=$$

$=\dfrac{1}{3}\neq 0 \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{9^n}{3^{2n+1}+n^2}$ $(\longleftrightarrow)$ – ряд розбігається за достатньою ознакою розбіжності.

1.2.3. Достатні ознаки збіжності числових рядів з невід'ємними членами

Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ називається знакододатним, якщо при всіх $n\in\mathbb{N}$ $a_n\geq 0$.

Основними ознаками, за допомогою яких досліджують збіжність знакододатних рядів, є:

− ознаки порівняння;
− ознака Даламбера;
− радикальна та інтегральна ознаки Коші.

Ознаки порівняння

Ознаки порівняння засновані на порівнянні даного ряду з рядом, про збіжність якого відомо.

Нехай дано два числові ряди: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$. Якщо при всіх $n\in\mathbb{N}$ $a_n\leq b_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ називається мажорантним для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ – мінорантним для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

Ознака порівняння. Нехай члени рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ невід'ємні, й існує такий номер n_0, що при всіх $n \ge n_0$, $n \in \mathbb{N}$, виконуються нерівності $0 \le a_n \le b_n$. Тоді зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Гранична форма ознаки порівняння. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – числовий ряд з невід'ємними членами, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряд, члени якого строго додатні $\left(\forall\, n \in \mathbb{N}, b_n > 0\right)$. Якщо існує границя: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l \quad \left(l \ne 0, l \ne \infty\right)$, то ряди поводяться однаково: або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Наслідки.

1. Якщо a_n і b_n при $n \to \infty$ – нескінченно малі величини одного порядку мализни $\left(a_n = O\left(b_n\right)\right)$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \text{const}$ $\left(\text{const} \ne 0\right)$, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ поводяться однаково.

2. Якщо a_n і b_n при $n \to \infty$ – еквівалентні нескінченно малі величини $\left(a_n \sim b_n\right)$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ поводяться однаково.

При використанні ознаки порівняння ряди, які необхідно дослідити, зручно порівнювати з так званими еталонними рядами. Вони наступні:

1) геометричний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \ - \left[\begin{array}{l}\text{збігається } (\rightarrow\leftarrow) \text{ при } 0<q<1; \\ \text{розбігається } (\leftarrow\rightarrow) \text{ при } q\ge 1;\end{array}\right.$$

2) узагальнений гармонічний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \left[\begin{array}{l}\text{збігається } (\rightarrow\leftarrow) \text{ при } p>1; \\ \text{розбігається } (\leftarrow\rightarrow) \text{ при } p\le 1.\end{array}\right.$$

Приклад **1.5.** Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n\cdot\sqrt[3]{n^2}}$.

Розв'язання. Випишемо загальний член ряду $a_n = \frac{\cos^2 n}{n\cdot\sqrt[3]{n^2}}$.

Даний ряд є знакододатним, тому що при всіх $n\in\mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{\cos^2 n}{n\cdot\sqrt[3]{n^2}} > 0 \quad \left(0<\cos^2 n<1,\ n\cdot\sqrt[3]{n^2}\ge 1\right).$$

Скористаємося ознакою порівняння. Для цього оцінимо a_n :

$$0<\cos^2 n<1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 0<\frac{\cos^2 n}{n\cdot\sqrt[3]{n^2}}<\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n^2}}=\frac{1}{n^{5/3}}=b_n .$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/3}}$ збігається, тому що $p=\frac{5}{3}>1$.

Згідно з ознакою порівняння, зі збіжності мажорантного ряду випливає збіжність досліджуваного ряду. Отже, досліджуваний ряд збігається за ознакою порівняння. Тобто, якщо

$$\frac{\cos^2 n}{n\cdot\sqrt[3]{n^2}}<\frac{1}{n\cdot\sqrt[3]{n^2}}\text{, то } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/3}}\ (\to\leftarrow)\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n\cdot\sqrt[3]{n^2}}\ (\to\leftarrow).$$

***Приклад* 1.6.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}$.

Розв'язання. Випишемо загальний член ряду $a_n=\frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}$.

Даний ряд є знакододатним, тому що при всіх $n\in\mathbb{N}$

$$a_n=\frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}>0$$

$$\left(n>\ln n\Rightarrow n-\ln n>0,\ \left(2+(-1)^n\right)=\begin{cases}1,\ n=2m-1,\ m\in\mathbb{N};\\ 3,\ n=2m,\quad\ m\in\mathbb{N}.\end{cases}\right).$$

Аналогічно з попереднім прикладом, скористаємося ознакою порівняння. Для цього оцінимо a_n:

$$a_n=\frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}\geq\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}=b_n.$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається, тому що $p=1$.

Згідно з ознакою порівняння, з розбіжності мінорантного додатного ряду випливає розбіжність досліджуваного ряду. Отже, досліджуваний ряд розбігається за ознакою порівняння. Тобто, якщо

$$\frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}>\frac{1}{n}\text{, то } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ (\leftarrow\rightarrow)\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{n-\ln n}\ (\leftarrow\rightarrow).$$

***Приклад* 1.7.** Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{4n^3+3n^2+\sqrt[3]{n}}}.$$

Розв'язання. Випишемо загальний член ряду a_n:

$$a_n = \frac{n+2}{\sqrt{4n^3+3n^2+\sqrt[3]{n}}}.$$

Даний ряд – знакододатний, тому що при всіх $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{n+2}{\sqrt{4n^3+3n^2+\sqrt[3]{n}}} > 0.$$

Скористаємося наслідком граничної форми ознаки порівняння (в даному випадку можна застосувати як наслідок 1, так і наслідок 2).

Застосуємо наслідок 2. Оскільки

$$a_n = \frac{n+2}{\sqrt{4n^3+3n^2+\sqrt[3]{n}}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{\sqrt{4n^3}} = \frac{n}{2n^{3/2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{1/2}} = \frac{1}{2}b_n,$$

то заданий ряд і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} b_n = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ поводяться однаково.

Аналогічний результат не важко отримати, використовуючи наслідок 1:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n+2}{\sqrt{4n^3+3n^2+\sqrt[3]{n}}}}{\dfrac{1}{n^{1/2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}\cdot(n+2)}{\sqrt{4n^3+3n^2+\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}}{n^{3/2}} = \frac{1}{2} = \text{const} \; (\text{const} \neq 0).$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ розбігається, тому що $p = \frac{1}{2} < 1$, отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} b_n = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ також розбігається, тому що, якщо всі члени гармонічного ряду помножити на сталу $\frac{1}{2}$, то поведінка ряду не зміниться (отримаємо ряд також розбіжний). В результаті, згідно з граничною ознакою порівняння, початковий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{4n^3 + 3n^2 + \sqrt[3]{n}}}$ розбігається.

Наслідок 3.

Якщо для n - го члена числового знакододатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ при $n \to \infty$ є справедливою еквівалентність $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} C \cdot \frac{1}{n^p}$ $(C = \text{const},\ C \neq 0)$, то при $p > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, а при $p \leq 1$ − розбігається.

***Приклад* 1.8.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2^n}{7^n}\right)$.

Розв'язання. Випишемо загальний член ряду $a_n = \ln\left(1 + \frac{2^n}{7^n}\right)$. Оскільки при всіх $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \ln\left(1 + \frac{2^n}{7^n}\right) > 0$ $\left(\ln\left(1 + \frac{2^n}{7^n}\right) > \ln 1 > 0\right)$, то даний ряд – знакододатний.

Скористаємося граничною ознакою порівняння. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2^n}{7^n}\right)}{\left(\frac{2}{7}\right)^n}=\left\|\begin{array}{l}\text{при } n\to\infty:\ \left(\frac{2}{7}\right)^n\to 0\Rightarrow\\ \Rightarrow\ln\left(1+\frac{2^n}{7^n}\right)\sim\frac{2^n}{7^n}=\left(\frac{2}{7}\right)^n\end{array}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^n}{\left(\frac{2}{7}\right)^n}=$$

$$=1=\text{const}\quad(\text{const}\neq 0),$$

то $\quad a_n=\ln\left(1+\frac{2^n}{7^n}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{2^n}{7^n}=\left(\frac{2}{7}\right)^n=b_n$.

Отже, заданий ряд і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n$ поводяться однаково.

Геометричний ряд (членами якого є елементи геометричної прогресії) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n$ збігається, тому що $q=\frac{2}{7}<1$, отже, згідно з граничною ознакою порівняння, початковий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{2^n}{7^n}\right)$ також збігається.

При знаходженні границі було використано еквівалентність нескінченно малих величин $\ln\left(1+\frac{2^n}{7^n}\right)$ і $\left(\frac{2}{7}\right)^n$ при $n\to\infty$ $\left(\ln(1+\alpha(n))\underset{\alpha\to 0}{\sim}\alpha(n)\right)$.

Зауваження.

Основна таблиця еквівалентностей нескінченно малих величин при $\alpha(n)\to 0\ \ (n\to\infty)$:

$\sin\alpha(n)\sim\alpha(n)$, $\qquad a^{\alpha(n)}-1\sim\alpha(n)\cdot\ln a$,

$\operatorname{tg}\alpha(n)\sim\alpha(n)$, $\qquad e^{\alpha(n)}-1\sim\alpha(n)$,

$\arcsin\alpha(n)\sim\alpha(n)$, $\qquad \log_a(1+\alpha(n))\sim\frac{\alpha(n)}{\ln a}$,

$\operatorname{arctg}\alpha(n)\sim\alpha(n)$, $\qquad \ln(1+\alpha(n))\sim\alpha(n)$,

$1-\cos\alpha(n)\sim\frac{\alpha^2(n)}{2}$; $\qquad (1+\alpha(n))^k-1\sim k\cdot\alpha(n)$.

***Приклад* 1.9.** Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3+5n-1}{n^3-n^2+3}$.

Розв'язання. Випишемо загальний член ряду $a_n=\ln\frac{n^3+5n-1}{n^3-n^2+3}$.

Оскільки при всіх $n\in\mathbb{N}$ $a_n=\ln\frac{n^3+5n-1}{n^3-n^2+3}>0$ $\left(\ln\frac{n^3+5n-1}{n^3-n^2+3}>\ln 1>0\right)$, то даний ряд – знакододатний.

Використаємо граничну ознаку порівняння. Спочатку виділимо цілу частину в дрібно-раціональному виразі, який знаходиться під знаком логарифма:

$$\frac{n^3+5n-1}{n^3-n^2+3}=1+\underbrace{\frac{n^3+5n-1}{n^3-n^2+3}-1}_{\text{спільний знаменник}}=1+\frac{n^3+5n-1-n^3+n^2-3}{n^3-n^2+3}=$$

$$=1+\frac{n^2+5n-4}{n^3-n^2+3}.$$

Тоді, враховуючи еквівалентність нескінченно малих величин $\ln\frac{n^3+5n-1}{n^3-n^2+3}$ та $\frac{n^2+5n-4}{n^3-n^2+3}$ при $n\to\infty$, маємо:

$$a_n=\ln\frac{n^3+5n-1}{n^3-n^2+3}=\ln\left(1+\frac{n^2+5n-4}{n^3-n^2+3}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{n^2+5n-4}{n^3-n^2+3}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{n^2}{n^3}=\frac{1}{n}=b_n.$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається, тому що $p=1$, отже, згідно з граничною ознакою порівняння, початковий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^3+5n-1}{n^3-n^2+3}$ також розбігається.

Ознака Даламбера. Якщо члени знакододатного числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є такими, що існує границя $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$, то при $l<1$ ряд збігається, а при $l>1$ (зокрема, при $l=+\infty$) – розбігається.

Ознака Даламбера при $l=1$ не дає відповіді на питання про збіжність ряду, тобто ряд може збігатися або розбігатися.

Зауваження.

Якщо розбіжність ряду доведено за ознакою Даламбера, то $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

***Приклад* 1.10.** Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{7^{n-1}\cdot\sqrt[3]{n^3+2}}{(n-3)!}$.

Розв'язання. При всіх $n=4,5,\ldots$ загальний член ряда

$$a_n=\frac{7^{n-1}\cdot\sqrt[3]{n^3+2}}{(n-3)!}>0,$$

отже, даний ряд знакододатний.

Оскільки загальний член ряду містить показникову функцію 7^{n-1} і факторіал $(n-3)!$ (достатньо наявності одного з них), то дослідження ряду на збіжність зручно проводити за допомогою ознаки Даламбера. Для цього знайдемо границю відношення при $n\to\infty$ члена ряду з номером $(n+1)$ до члена ряду з номером n :

$$a_n=\frac{7^{n-1}\cdot\sqrt[3]{n^3+2}}{(n-3)!};$$

$$a_{n+1}=\frac{7^{n+1-1}\cdot\sqrt[3]{(n+1)^3+2}}{(n+1-3)!}=\frac{7^{1+(n-1)}\cdot\sqrt[3]{(n+1)^3+2}}{(n-2)!}=\frac{7\cdot 7^{n-1}\cdot\sqrt[3]{(n+1)^3+2}}{(n-3)!\cdot(n-2)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7\cdot 7^{n-1}\cdot\sqrt[3]{(n+1)^3+2}}{(n-3)!\cdot(n-2)}\Bigg/\frac{7^{n-1}\cdot\sqrt[3]{n^3+2}}{(n-3)!}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot \cancel{7^{n-1}}\cdot\sqrt[3]{(n+1)^3+2}\cdot\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}\cdot(n-2)\cdot\cancel{7^{n-1}}\cdot\sqrt[3]{n^3+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot\sqrt[3]{(n+1)^3+2}}{(n-2)\cdot\sqrt[3]{n^3+2}}=$$

$$=\left\|\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(n+1)^3+2}}{\sqrt[3]{n^3+2}}=1\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{7}{(n-2)}=0<1\,.$$

Оскільки границя скінченна і меньша за одиницю, то згідно з ознакою Даламбера, ряд $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{7^{n-1}\cdot\sqrt[3]{n^3+2}}{(n-3)!}$ збігається.

***Приклад* 1.11.** Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\big((n+1)!\big)^2}{(2n)!}\cdot\arcsin\frac{1}{2^n}\,.$$

Розв'язання. Даний ряд знакододатний, тому що при всіх $n\in\mathbb{N}$ $a_n=\frac{\big((n+1)!\big)^2}{(2n)!}\cdot\arcsin\frac{1}{2^n}>0$.

Аналогічно з попереднім прикладом, скористаємося ознакою Даламбера. Знаючи загальний член ряду, замінимо n на $(n+1)$ і знайдемо член ряду a_{n+1}:

$$a_{n+1}=\frac{\big((n+1+1)!\big)^2}{\big(2(n+1)\big)!}\cdot\arcsin\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{\big((n+2)!\big)^2}{(2n+2)!}\cdot\arcsin\frac{1}{2^{n+1}}=$$

$$=\frac{\left((n+1)!\right)^2\cdot(n+2)^2\cdot\arcsin\frac{1}{2^{n+1}}}{(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}.$$

Далі знайдемо границю відношення a_{n+1} до a_n при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left((n+1)!\right)^2\cdot(n+2)^2\cdot\arcsin\frac{1}{2^{n+1}}}{(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}\Bigg/\frac{\left((n+1)!\right)^2\cdot\arcsin\frac{1}{2^n}}{(2n)!}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\left((n+1)!\right)^2}\cdot(n+2)^2\cdot\arcsin\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}\cdot(2n+1)(2n+2)\cdot\cancel{\left((n+1)!\right)^2}\cdot\arcsin\frac{1}{2^n}}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\text{при } n\to\infty:\ \frac{1}{2^n}\to 0\Rightarrow\arcsin\frac{1}{2^n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{2^n}\\ \text{при } n\to\infty:\ \frac{1}{2^{n+1}}\to 0\Rightarrow\arcsin\frac{1}{2^{n+1}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{2^{n+1}}\end{array}\right\|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2\cdot\frac{1}{2^{n+1}}}{(2n+1)(2n+2)\cdot\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2\cdot\cancel{\frac{1}{2^n}}\cdot\frac{1}{2}}{(2n+1)(2n+2)\cdot\cancel{\frac{1}{2^n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{2(2n+1)(2n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2\cdot 4n^2}=\frac{1}{8}<1.$$

Оскільки границя скінченна і менша за одиницю, то згідно з ознакою Даламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n)!}\cdot\arcsin\frac{1}{2^n}$ збігається.

***Приклад* 1.12.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8^n\cdot n!}{(n+1)^n}$.

Розв'язання. Даний ряд знакододатний, тому що при всіх $n\in\mathbb{N}$ $a_n=\dfrac{8^n\cdot n!}{(n+1)^n}>0$.

Скористаємося ознакою Даламбера. Знаючи загальний член ряду, замінимо n на $(n+1)$ і знайдемо член ряду a_{n+1}:

$$a_{n+1}=\frac{8^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1+1)^{n+1}}=\frac{8\cdot 8^n\cdot n!\cdot(n+1)}{(n+2)^{n+1}}=\frac{8\cdot 8^n\cdot n!\cdot(n+1)}{(n+2)\cdot(n+2)^n}.$$

Далі знайдемо границю відношення a_{n+1} до a_n при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8\cdot 8^n\cdot n!\cdot(n+1)}{(n+2)\cdot(n+2)^n}\Big/\frac{8^n\cdot n!}{(n+1)^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8\cdot\cancel{8^n}\cdot\cancel{n!}\cdot(n+1)\cdot(n+1)^n}{(n+2)\cdot(n+2)^n\cdot\cancel{8^n}\cdot\cancel{n!}}=\left\|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+2)}=1\right\|=$$

$$=8\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{(n+2)^n}=8\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n=\left\|1^\infty\right\|=8\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+2)-1}{n+2}\right)^n=$$

$$=8\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^n=8\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\right]^{\frac{-1}{n+2}\cdot n}=$$

$$=\left\|\begin{array}{c}\text{Скористаємося другою важливою границею}\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e\approx 2,7183\end{array}\right\|=$$

$$=8e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+2}}=8e^{-1}=\frac{8}{e}>1\quad\left(8>e\Rightarrow\frac{8}{e}>1\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{8}{e}>1$, то, згідно з ознакою Даламбера, початковий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8^n\cdot n!}{(n+1)^n}$ розбігається.

Радикальна ознака Коші. Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ – знакододатний числовий ряд, та існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$, тоді при $l<1$ ряд збігається, а при $l>1$ (зокрема, при $l=+\infty$) – розбігається.

Також, як і ознака Даламбера, радикальна ознака Коші при $l=1$ не дає відповіді на питання про збіжність ряду, тобто ряд може збігатися або розбігатися.

Зауваження.

Якщо розбіжність ряду доведено за радикальною ознакою Коші, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$.

***Приклад* 1.13.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{5n+1}{n-1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$.

Розв'язання. Даний ряд знакододатний, тому що при всіх

$n=2,3,\dots$ $a_n=\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{5n+1}{n-1}\right)^{\frac{n+1}{2}}>0$.

Оскільки загальний член ряду містить степенево-показникову $\left(\dfrac{5n+1}{n-1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$ і показникову 2^n функції, то дослідження ряду на збіжність зручно проводити за допомогою радикальної ознаки Коші. Для цього знайдемо границю при $n\to\infty$ кореня n-ого степеня від загального члена ряду, тобто:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{5n+1}{n-1}\right)^{\frac{n+1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{5n+1}{n-1}\right)^{\frac{n+1}{2n}}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}=\left\|\text{при } n\to\infty:\ \frac{1}{2n}\to 0\right\|=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}}{2}>1,\ \text{тому що } \sqrt{5}>2\,.$$

Оскільки границя більша за одиницю, то згідно з радикальною ознакою Коші, ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{5n+1}{n-1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$ розбігається.

***Приклад* 1.14.** Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{2n-3}{7n+1}\right)^{n^2}.$$

Розв'язання. Даний ряд знакододатний, тому що при всіх

$$n=2,3,\ldots \qquad a_n=\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{2n-3}{7n+1}\right)^{n^2}>0\,.$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{2n-3}{7n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)^{1/2n}\left(\frac{2n-3}{7n+1}\right)^{n}=$$

$$=\underbrace{\lim_{n\to\infty}(n+1)^{1/2n}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{7n+1}\right)^{n}}_{0}=\left\|\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{7n+1}\right)^{n}=\left(\frac{2}{7}\right)^{+\infty}=0,\\ \text{так як } \frac{2}{7}<1\end{array}\right\|=0<1\,.$$

При знаходженні границі було використано правило Лопіталя, тобто

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{1/2n} = \left\| \infty^0 \right\| = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)^{1/2n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln(n+1)} = \left\| 0\cdot\infty \right\| =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{2n}} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln(n+1))'}{(2n)'}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)}{2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}} = e^0 = 1 .$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 0 < 1$, то, згідно з радикальному ознакою Коші, початковий ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt{n+1}\cdot\left(\frac{2n-3}{7n+1}\right)^{n^2}$ збігається.

***Приклад* 1.15.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3\cdot\operatorname{arctg}^n\frac{\pi}{3n}$.

Розв'язання. Даний ряд знакододатний, тому що при всіх $n\in\mathbb{N}$ $a_n = n^3\cdot\operatorname{arctg}^n\frac{\pi}{3n} > 0$.

Скористаємося радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3\cdot\operatorname{arctg}^n\frac{\pi}{3n}} = \lim_{n\to\infty}\left(n^{3/n}\cdot\operatorname{arctg}\frac{\pi}{3n}\right) =$$

$$= \left\| \textit{при } n\to\infty:\ \frac{\pi}{3n}\to 0 \Rightarrow \operatorname{arctg}\frac{\pi}{3n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{3n} \right\| = \lim_{n\to\infty}\left(n^{3/n}\cdot\frac{\pi}{3n}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot\underbrace{\lim_{n\to\infty}n^{3/n}}_{1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{\pi}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{\pi}{3}\cdot 0 = 0 < 1 .$$

Аналогічно з попереднім прикладом, при знаходженні границі було використано правило Лопіталя, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3}=\lim_{n\to\infty}n^{3/n}=\left\|\infty^0\right\|=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n)^{3/n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}\cdot\ln n}=\left\|0\cdot\infty\right\|=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\ln n}{n}}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3\ln n)'}{(n)'}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3/n}{1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}=e^0=1.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0<1$, то, згідно з радикальною ознакою Коші, початковий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\cdot\operatorname{arctg}^n\frac{\pi}{3n}$ збігається.

Інтегральна ознака Коші. Нехай функція $f(x)$ – неперервна, невід’ємна $(f(x)>0)$ і монотонно спадна на проміжку $x\in[a,+\infty)$ $(a\geq1)$, і нехай $f(n)=a_n$ при всіх $n\in\mathbb{N}$. Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ і невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ поводяться однаково: або збігаються, або розбігаються одночасно.

***Приклад* 1.16.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{e^{2n}+1}$.

Розв’язання. Даний ряд знакододатний, тому що при всіх $n\in\mathbb{N}$ $a_n=\frac{e^n}{e^{2n}+1}>0$.

Скористаємося інтегральною ознакою Коші. Для цього замінимо у виразі загального члена ряду $a_n=f(n)$ номер n на змінну x і переконаємося, що отримана функція $f(x)>0$ є неперервною і монотонно спадною на всьому нескінченному інтервалі змінення x. Тобто,

1) $a_n = f(n) = \dfrac{e^n}{e^{2n}+1} > 0$ при всіх $n \in \mathbb{N}$;

2) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1} > 0$ − неперервна і монотонно спадна функція при $x \in [1, +\infty)$.

Потім обчислимо невласний інтеграл від $f(x)$ з нескінченною верхнею межею:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^x dx}{1+\left(e^x\right)^2} = \left\| d\left(e^x\right) = e^x dx \right\| = \int_1^{+\infty} \frac{d\left(e^x\right)}{1+\left(e^x\right)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} e^x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} e^x - \operatorname{arctg} e^1 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} e = \text{const}.$$

Оскільки границя дорівнює константі, то невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$ збігається. Отже, за інтегральною ознакою Коші збігається й досліджуваний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^n}{e^{2n}+1}$.

***Приклад* 1.17.** Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot \ln^p(\alpha n)}$, де α − додатне число, $\alpha n > 1$ і $p > 0$.

Розв'язання. При всіх $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \dfrac{1}{n \cdot \ln^p(\alpha n)} > 0$, отже, початковий ряд знакододатний.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші. Для цього введемо функцію $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln^p(\alpha x)}$, яка задовольняє умовам інтегральної ознаки:

1) $a_n = f(n) = \dfrac{1}{n\cdot \ln^p(\alpha n)} > 0$ при всіх $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $\alpha n > 1$ і $p > 0$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x\cdot \ln^p(\alpha x)} > 0$ – неперервна і монотонно спадна функція при $x \in [1, +\infty)$, $\alpha > 0$, $\alpha n > 1$ і $p > 0$.

Дослідимо невласний інтеграл від цієї функції при значеннях $p = 1$, $0 < p < 1$ і $p > 1$.

Обчислимо невласний інтеграл від функції $f(x)$ при значенні $p = 1$:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot \ln(\alpha x)} = \left\| d(\ln(\alpha x)) = \frac{dx}{x} \right\| = \int_1^{+\infty} \frac{d(\ln(\alpha x))}{\ln(\alpha x)} =$$

$$= \ln\left|\ln(\alpha x)\right|\Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln\left|\ln(\alpha x)\right| - \ln\left|\ln \alpha\right| = \left\| \ln(+\infty) \to +\infty \right\| =$$

$$= \left\| +\infty - \ln\left|\ln \alpha\right| \right\| = +\infty \neq \mathrm{const}.$$

Оскільки границя дорівнює нескінченності, то даний невласний інтеграл розбігається, отже, за інтегральною ознакою Коші розбігається й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\cdot \ln(\alpha n)}$.

Обчислимо невласний інтеграл від функції $f(x)$ при значенні $0 < p < 1$:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot \ln^p(\alpha x)} = \left\| d(\ln(\alpha x)) = \frac{dx}{x} \right\| = \int_1^{+\infty} \frac{d(\ln(\alpha x))}{\ln^p(\alpha x)} =$$

$$= \left.\frac{\left(\ln\left|\ln(\alpha x)\right|\right)^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{+\infty} = \frac{1}{1-p}\left[\lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left|\ln(\alpha x)\right|\right)^{1-p} - \left(\ln\left|\ln(\alpha)\right|\right)^{1-p}\right] =$$

$$=\left\| 0<p<1 \Rightarrow (1-p)>0 \Rightarrow \text{при } n\to+\infty\text{: } \left(\ln\left|\ln(\alpha n)\right|\right)^{1-p} \to +\infty \right\| =$$

$$=\left\| \frac{1}{1-p}\left[+\infty-\left(\ln\left|\ln(\alpha)\right|\right)^{1-p}\right] \right\| = +\infty \neq \text{const} .$$

Отже, невласний інтеграл розбігається, таким чином, за інтегральною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{p}(\alpha n)}$ також розбігається.

Обчислимо невласний інтеграл від функції $f(x)$ при значенні $p>1$:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^{p}(\alpha x)} = \left\| d(\ln(\alpha x)) = \frac{dx}{x} \right\| = \int_1^{+\infty}\frac{d(\ln(\alpha x))}{\ln^{p}(\alpha x)} =$$

$$=\frac{1}{1-p}\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left|\ln(\alpha x)\right|\right)^{1-p}-\left(\ln\left|\ln(\alpha)\right|\right)^{1-p}\right]=$$

$$=\left.\frac{\left(\ln\left|\ln(\alpha x)\right|\right)^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{+\infty} = \left\| \begin{array}{l} p>1 \Rightarrow (1-p)<0 \Rightarrow (p-1)>0 \\ \text{при } n\to+\infty\text{:} \\ \left(\ln\left|\ln(\alpha n)\right|\right)^{p-1} \to +\infty \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\ln\left|\ln(\alpha n)\right|\right)^{1-p} = \dfrac{1}{\left(\ln\left|\ln(\alpha n)\right|\right)^{p-1}} \to 0 \end{array} \right\| =$$

$$=\frac{1}{1-p}\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\ln\left|\ln(\alpha x)\right|\right)^{p-1}}-\left(\ln\left|\ln(\alpha)\right|\right)^{1-p}\right]=$$

$$=\frac{1}{1-p}\left[0-\left(\ln\left|\ln(\alpha)\right|\right)^{1-p}\right]=\frac{1}{p-1}\cdot\left(\ln\left|\ln(\alpha)\right|\right)^{1-p} = \text{const} .$$

Невласний інтеграл збігається, отже, за інтегральною ознакою Коші ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{p}(\alpha n)}$ при $p>1$ також збігається.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln^{p}(\alpha n)}$, де α – додатне число, $\alpha n>1$ і $p>0$, також можна використовувати як еталонний в ознаках порівняння, тобто:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{p}(\alpha n)}\ -\ \left[\begin{array}{l}\alpha>0,\ \alpha n>1,\ p>0;\\ \text{збігається }(\to\leftarrow)\text{ при } p>1;\\ \text{розбігається }(\leftarrow\to)\text{ при } p\le 1.\end{array}\right.$$

***Приклад* 1.18.** Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{e^{1/\sqrt{n}}-1}{\sqrt{3n+2}\cdot\sqrt[4]{\ln^{3}(n-5)}}\,.$$

Розв'язання. Даний ряд знакододатний, тому що при всіх $n=7,8,\ldots$ $a_n=\dfrac{e^{1/\sqrt{n}}-1}{\sqrt{3n+2}\cdot\sqrt[4]{\ln^{3}(n-5)}}>0$.

Застосуємо граничну ознаку порівняння. Візьмемо для порівняння ряд $b_n=\dfrac{1}{(n-5)\cdot\sqrt[4]{\ln^{3}(n-5)}}>0$ і обчислимо границю відношення a_n до b_n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{e^{1/\sqrt{n}}-1}{\sqrt{3n+2}\cdot\sqrt[4]{\ln^{3}(n-5)}}}{\dfrac{1}{(n-5)\cdot\sqrt[4]{\ln^{3}(n-5)}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(e^{1/\sqrt{n}}-1\right)\cdot(n-5)\cdot\cancel{\sqrt[4]{\ln^{3}(n-5)}}}{\sqrt{3n+2}\cdot\cancel{\sqrt[4]{\ln^{3}(n-5)}}}=$$

$$\left\|\text{при } n\to\infty:\ \frac{1}{\sqrt{n}}\to 0\Rightarrow e^{1/\sqrt{n}}-1\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{n}}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot(n-5)}{\sqrt{3n+2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-5)}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{3n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{3}\cdot n}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\text{const}$$

$(\text{const}\neq 0,\ \text{const}\neq\infty)$.

Оскільки існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\text{const}$ $(\text{const}\neq 0)$, то загальні члени порівнювальних рядів:

$$a_n=\frac{e^{1/\sqrt{n}}-1}{\sqrt{3n+2}\cdot\sqrt[4]{\ln^3(n-5)}}\ \text{ і }\ b_n=\frac{1}{(n-5)\cdot\sqrt[4]{\ln^3(n-5)}}$$

при $n\to\infty$ – нескінченно малі одного порядку мализни $(a_n=O(b_n))$, отже, ряди $\sum\limits_{n=7}^{\infty}a_n$ і $\sum\limits_{n=7}^{\infty}b_n$ поводяться однаково.

Для досліджування ряду $\sum\limits_{n=7}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=7}^{\infty}\frac{1}{(n-5)\cdot\sqrt[4]{\ln^3(n-5)}}$ скористаємося інтегральною ознакою Коші. Для цього введемо функцію $f(x)=\frac{1}{(x-5)\cdot\sqrt[4]{\ln^3(x-5)}}$, яка задовольняє умови інтегральної ознаки

1) $a_n=f(n)=\frac{1}{(n-5)\cdot\sqrt[4]{\ln^3(n-5)}}>0$ при всіх $n=7,8,\ldots$;

2) $f(x)=\frac{1}{(x-5)\cdot\sqrt[4]{\ln^3(x-5)}}>0$ − неперервна і монотонно спадна при $x\in[7,+\infty)$.

Дослідимо невласний інтеграл від цієї функції:

$$\int_7^{+\infty}f(x)dx=\int_7^{+\infty}\frac{1}{(x-5)\cdot\sqrt[4]{\ln^3(x-5)}}dx=\left\|d(\ln(x-5))=\frac{dx}{x-5}\right\|=$$

$$= \int_{7}^{+\infty} \frac{d\left(\ln\left(x-5\right)\right)}{\left(\ln\left(x-5\right)\right)^{3/4}} = \int_{7}^{+\infty} \left(\ln\left(x-5\right)\right)^{-3/4} d\left(\ln\left(x-5\right)\right) = \left.\frac{\left(\ln\left(x-5\right)\right)^{1/4}}{1/4}\right|_{7}^{+\infty} =$$

$$= 4\sqrt[4]{\ln\left(x-5\right)}\Big|_{7}^{+\infty} = 4\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\ln\left(x-5\right)} - \sqrt[4]{\ln\left(7-5\right)}\right) =$$

$$= 4\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt[4]{\ln\left(x-5\right)} - \sqrt[4]{\ln 2}\right) = \left\| \ln\left(+\infty\right) \to +\infty \right\| =$$

$$= 4\cdot\left(+\infty - \sqrt[4]{\ln 2}\right) = +\infty \neq \text{const}\ .$$

Невласний інтеграл розбігається, отже, за інтегральною ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{1}{\left(n-5\right)\cdot\sqrt[4]{\ln^3\left(n-5\right)}}$ буде розбігатися. Оскільки

$$\left(\frac{e^{1/\sqrt{n}}-1}{\sqrt{3n+2}\cdot\sqrt[4]{\ln^3\left(n-5\right)}} \underset{n\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{\left(n-5\right)\cdot\sqrt[4]{\ln^3\left(n-5\right)}}\right)\right),$$

то за граничною ознакою порівняння початковий ряд

$$\sum_{n=7}^{\infty} \frac{e^{1/\sqrt{n}}-1}{\sqrt{3n+2}\cdot\sqrt[4]{\ln^3\left(n-5\right)}} \quad \text{також розбігається.}$$

Зауваження.

Враховуючи властивості збіжних рядів, всі теореми для знакододатних рядів є справедливими й для рядів, всі члени яких $a_n \le 0$, а також для рядів, для яких нерівність $a_n \ge 0$ виконується, починаючи з деякого номера N_0 .

2. Знакозмінні і знакопереміжні ряди. Абсолютна і умовна збіжність. Ознака Лейбніца

Числовий ряд називається знакозмінним рядом, якщо він містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів. Окремим випадком знакозмінних рядів є знакопереміжні ряди. Знакопереміжним рядом називають ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n , \qquad (2.1)$$

де $a_n > 0$, тобто, будь-які два сусідніх члени мають різні знаки.

При дослідженні збіжності знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розглядають ряд, складений з абсолютних величин його членів, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, який є знакододатним. В залежності від того, як поводиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, розрізняють два типи збіжності знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: абсолютну і умовну.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно, то він збігається і в звичайному значенні.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається умовно збіжним, якщо він збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ розбігається.

Теорема Лейбніца (ознака Лейбніца). Якщо для членів знакопереміжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$, де $a_n > 0$ виконано дві умови:

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

2) $a_{n+1} < a_n$, тобто $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – монотонно спадна послідовність, починаючи з деякого номера $n > N_0$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ – збігається, і його сума задовольняє нерівність $S < a_1$.

Дослідження знакопереміжного ряду на збіжність краще починати з досліджування абсолютної збіжності, тобто з досліджування знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$. Це можна зробити за допомогою однієї з ознак збіжності для знакододатних числових рядів. Якщо цей ряд збігається, то початковий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ збігається абсолютно. Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ розбігається, то початковий ряд абсолютної збіжності не має. Для досліджування умовної збіжності необхідно застосовувати ознаку Лейбніца (ознаку Лейбніца іноді називають ознакою умовної збіжності).

***Приклад* 2.1.** Дослідити на збіжність знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\sqrt{n+1}}{n^3 + 5n^2 - 1}\right) \cdot \operatorname{arctg} \frac{\cos n}{\sqrt[4]{n+2}}$. Якщо ряд збігається, вказати тип збіжності.

Розв'язання. Випишемо загальний член знакозмінного ряду:

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{\sqrt{n+1}}{n^3 + 5n^2 - 1}\right) \cdot \operatorname{arctg} \frac{\cos n}{\sqrt[4]{n+2}}.$$

Дослідимо даний ряд на абсолютну збіжність. Для цього дослідимо ряд, складений з абсолютних величин членів початкового ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\sqrt{n+1}}{n^3+5n^2-1}\right)\cdot\left|\operatorname{arctg}\frac{\cos n}{\sqrt[4]{n+2}}\right|.$$

При $\alpha \geq 0$ $0 \leq \ln(1+\alpha) \leq \alpha$, тоді за умови що $n \in \mathbb{N}$, отримаємо:

$$0 < \ln\left(1+\frac{\sqrt{n+1}}{n^3+5n^2-1}\right) < \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+5n^2-1}.$$

Для досліджування на збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ скористаємося ознакою порівняння. Для цього оцінимо $|a_n|$, враховуючи при цьому, що $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\operatorname{arctg}\frac{\cos n}{\sqrt[4]{n+2}}\right| < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \ln\left(1+\frac{\sqrt{n+1}}{n^3+5n^2-1}\right)\cdot\left|\operatorname{arctg}\frac{\cos n}{\sqrt[4]{n+2}}\right| < \frac{\sqrt{n+1}}{n^3+5n^2-1}\cdot\frac{\pi}{2} \underset{n\to\infty}{\sim}$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{n}}{n^3} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^{5/2}} = \frac{\pi}{2}\cdot b_n.$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ збігається, тому що $p = \frac{5}{2} > 1$. Звідси, використовуючи властивості збіжних рядів, отримаємо, що ряд $\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}$ збігається. Отже, за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ збігається. Таким чином, за визначенням, знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\sqrt{n+1}}{n^3+5n^2-1}\right)\cdot\operatorname{arctg}\frac{\cos n}{\sqrt[4]{n+2}}$ збігається абсолютно.

***Приклад* 2.2.** Дослідити на збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{(n-1)3^{2n}}$. Якщо ряд збігається, вказати тип збіжності.

Розв'язання. Дослідимо даний ряд на абсолютну збіжність. Для цього ряд з абсолютних величин $\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(n-1)\cdot 3^{2n}}$ дослідимо за ознакою Даламбера:

$$a_n=\frac{2^{2n}}{(n-1)\cdot 3^{2n}}>0 \text{ при всіх } n=2,3,\ldots,$$

$$a_{n+1}=\frac{2^{2(n+1)}}{(n+1-1)\cdot 3^{2(n+1)}}=\frac{2^{2n+2}}{n\cdot 3^{2n+2}}=\frac{2^{2n}\cdot 2^2}{n\cdot 3^{2n}\cdot 3^2}=\frac{4\cdot 2^{2n}}{9n\cdot 3^{2n}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\cdot 2^{2n}}{9n\cdot 3^{2n}}\Big/\frac{2^{2n}}{(n-1)\cdot 3^{2n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\cancel{2^{2n}}\cdot(n-1)\cdot\cancel{3^{2n}}}{9n\cdot\cancel{3^{2n}}\cdot\cancel{2^{2n}}}=\frac{4}{9}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\frac{4}{9}<1.$$

Отже, ряд з абсолютних величин $\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(n-1)3^{2n}}$ збігається за ознакою Даламбера. Таким чином, початковий знакопереміжний ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{(n-1)3^{2n}}$ збігається абсолютно.

***Приклад* 2.3.** Дослідити на збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[7]{(8n-5)^2}}$. Якщо ряд збігається, вказати тип збіжності.

Розв'язання. Випишемо ряд, складений з абсолютних величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{(8n-5)^2}},$$

де при всіх $n\in\mathbb{N}$ $a_n=\frac{1}{\sqrt[7]{(8n-5)^2}}>0$.

Очевидно, що

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[7]{(8n-5)^2}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt[7]{64n^2}}=\frac{1}{\sqrt[7]{64}}\cdot\frac{1}{n^{2/7}}=\frac{1}{\sqrt[7]{64}}\cdot b_n.$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/7}}$ розбігається, тому що $p=\frac{2}{7}<1$. Звідси, використовуючи властивості збіжних рядів, отримаємо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{64n^2}}$ розбігається. Тоді у відповідності з ознакою порівняння робимо висновок, що ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[7]{(8n-5)^2}}$ також розбігається.

В цьому випадку для з'ясування збіжності початкового знакопереміжного ряду необхідно застосувати ознаку Лейбніца, яка стверджує, що знакопереміжний ряд збігається, якщо модуль його загального члена, монотонно спадаючи, наближається до нуля:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[7]{(8n-5)^2}} = 0$;

2) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[7]{(8n-5)^2}}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{(8n+3)^2}}$.

Доведемо, що $a_{n+1} < a_n$. Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{(8x-5)^2}} = (8x-5)^{-2/7},$$

де $f(n) = a_n$. Оскільки її похідна

$$f'(x) = -\frac{2}{7}(8x-5)^{-9/7} \cdot 8 = -\frac{16}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[7]{(8x-5)^9}} < 0$$

при $x > \dfrac{5}{8}$, то функція $f(x)$ монотонно спадає на проміжку $\left(\dfrac{5}{8}, +\infty\right)$. Члени ряду a_n і a_{n+1} є значеннями цієї функції при $x_1 = n$ і $x_2 = n+1$. Оскільки $x_1 < x_2$, то $a_n > a_{n+1}$, тобто послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – монотонно спадна, що і було потрібно довести.

Таким чином, отримали, що у відповідності з ознакою Лейбніца ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt[7]{(8n-5)^2}}$ збігається, і ця збіжність є умовною.

Приклад **2.4.** Дослідити на збіжність знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln(n+2)}{n}$. Якщо ряд збігається, вказати тип збіжності.

Розв'язання. Випишемо ряд, складений з абсолютних величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n},$$

де при всіх $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \dfrac{\ln(n+2)}{n} > 0$.

Для досліджування на збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ скористаємося ознакою порівняння. Для цього оцінимо a_n:

$$a_n = \frac{\ln(n+2)}{n} \geq \frac{\ln 3}{n} = \ln 3 \cdot \frac{1}{n} = \ln 3 \cdot b_n.$$

Узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ розбігається, тому що $p = 1$. Тоді, використовуючи властивості збіжних рядів, отримаємо, що розбігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln 3}{n}$. В результаті, у відповідності з ознакою порівняння робимо висновок, що ряд, складений з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+2)}{n}$, також розбігається. Отже, початковий ряд абсолютно збігатися не буде.

Оскільки ряд знакопереміжний, застосуємо ознаку Лейбніца:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\ln(n+2)}{n} = \left\| \dfrac{\infty}{\infty} \right\| = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(\ln(n+2))'}{(n)'} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1/(n+2)}{1} =$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n+2} = 0$;

2) $a_n = \dfrac{\ln(n+2)}{n}$, $a_{n+1} = \dfrac{\ln(n+3)}{n+1}$.

Доведемо, що $a_{n+1} < a_n$. Введемо позначення:

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x}, \text{ тоді } f(n) = a_n.$$

Обчислимо похідну цієї функції:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+2} \cdot x - 1 \cdot \ln(x+2)}{x^2} = \frac{x - (x+2) \cdot \ln(x+2)}{x^2(x+2)} =$$

$$= \frac{x - x \cdot \ln(x+2) - 2\ln(x+2)}{x^2(x+2)} = \frac{x\left(1 - \ln(x+2)\right) - 2\ln(x+2)}{x^2(x+2)}.$$

Легко бачити, що $f'(x) < 0$ при всіх $x \geq 2$, тому що

$$\left(1 - \ln(x+2)\right)\Big|_{x \geq 2} \leq 1 - \ln 4 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x\left(1 - \ln(x+2)\right) - 2\ln(x+2)\right)\Big|_{x \geq 2} \leq 2 \cdot (1 - \ln 4) - 2\ln 4 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x\left(1 - \ln(x+2)\right) - 2\ln(x+2)}{x^2(x+2)}\right)\Bigg|_{x \geq 2} \leq \frac{2(1 - \ln 4) - 2\ln 4}{2^2 \cdot 4} < 0.$$

Отже, функція $f(x)$ монотонно спадає на проміжку $[2, +\infty)$. Члени ряду a_n і a_{n+1} є значеннями цієї функції при $x_1 = n$ і $x_2 = n+1$. Оскільки $x_1 < x_2$, то $a_n > a_{n+1}$, тобто послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – монотонно спадна, що і потрібно було довести.

Таким чином, отримали, що у відповідності з ознакою Лейбніца ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+2)}{n}$ збігається, і ця збіжність є умовною.

***Приклад* 2.5.** Дослідити на збіжність знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arccos^n \frac{1}{n}$. Якщо ряд збігається, вказати тип збіжності.

Розв'язання. Випишемо ряд, складений з абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{1}{n}$, де при всіх $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \arccos^n \frac{1}{n} \geq 0$.

Скористаємося радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\arccos^n \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \arccos \frac{1}{n} = \frac{\pi}{2} > 1$$

$$\left(\pi > 2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} > 1\right).$$

Отже, робимо висновок, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{1}{n}$ розбігається.

З розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає, що початковий знакозмінний ряд абсолютно збігатися не буде. Застосуємо ознаку Лейбніца, і з'ясуємо, чи збігається даний ряд умовно. Очевидно, що

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \arccos^n \frac{1}{n} = \left\| \begin{array}{l} \text{при } n \to \infty: \ \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \arccos \frac{1}{n} \to \frac{\pi}{2} \\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{+\infty} \to +\infty, \ \text{оскільки } \ \frac{\pi}{2} > 1 \end{array} \right\| =$$

$$= +\infty \neq 0,$$

тобто, одна з умов ознаки Лейбніца (необхідна ознака збіжності рядів) не виконується. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \arccos^n \frac{1}{n}$ розбігається.

***Приклад* 2.6.** Дослідити на збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\frac{7n^5-2}{4n^5+3}$. Якщо ряд збігається, вказати тип збіжності.

Розв'язання. Випишемо ряд, складений з абсолютних величин: $\sum_{n=2}^{\infty}a_n = \sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{7n^5-2}{4n^5+3}$, де при всіх $n\in\mathbb{N}$ $a_n = \ln\frac{7n^5-2}{4n^5+3} > 0$.

Обчислимо границю загального члена цього ряду при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{7n^5-2}{4n^5+3} = \ln\frac{7}{4} \neq 0.$$

Таким чином, отримали, що для даного ряду не виконано необхідну ознаку збіжності, з чого випливає розбіжність ряду $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\frac{7n^5-2}{4n^5+3}$.

3. Функціональні ряди

Функціональний ряд і його область збіжності

Нехай задано нескінченну послідовність функцій $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, і нехай всі її члени $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x), ...$ визначені на множині $A \subseteq \mathbb{R}$.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ..., \qquad (3.1)$$

члени якого є функціями від змінної x, називається функціональним рядом.

При різних значеннях x з функціонального ряду отримаємо різні числові ряди, які можуть бути збіжними або розбіжними. Таким чином, для будь-якого значення $x = x_0$, де $x_0 \in A$, функціональний ряд є числовим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + ... + u_n(x_0) + ... \qquad (3.2)$$

Якщо цей ряд збігається, то кажуть, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається в точці $x = x_0$.

Сукупність всіх значень змінної x, при яких ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається, називається областю збіжності даного функціонального ряду. Методи знаходження області збіжності функціонального ряду засновані на застосуванні відомих ознак збіжності, частіше за все, це ознака Даламбера або радикальна ознака Коші.

***Приклад* 3.1.** Дослідити на збіжність функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^2}{(1+x^2)^n}$. Знайти область збіжності.

Розв'язання. Ряд збігається на всій числовій осі. Дійсно, для ряду, складеного з абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot x^2}{(1+x^2)^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ при $x = 0$ збіжність є очевидною, а при $x \neq 0$ ознака Даламбера призводить до нерівності:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \Big/ \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{x^2} \cdot \cancel{(1+x^2)^n}}{\cancel{(1+x^2)^n} \cdot (1+x^2) \cdot \cancel{x^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} < 1$$

$$\left(\frac{1}{1+x^2} < 1 \Rightarrow 1+x^2 > 1 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} / \{0\} \right),$$

з якої випливає, що й для всіх $x \neq 0$ початковий ряд збігається. Таким чином, цей ряд збігається абсолютно на всій числовій осі, тобто для всіх $x \in \mathbb{R}$.

***Приклад* 3.2.** Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \sqrt{\frac{x}{n}} \right)^{2n^2}$.

Розв'язання. Очевидно, що цей ряд розбігається при $x = 0$. Зафіксувавши x додатним $(x > 0)$, з урахуванням того, що

$$1 - \cos\sqrt{\frac{x}{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x}{2n} \;\Rightarrow\; \cos\sqrt{\frac{x}{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} 1 - \frac{x}{2n},$$

скористаємося радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{2n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-x}{2n}\right)^{\frac{2n}{-x}}\right]^{-x}=e^{-x}<1,$$

$$e^{-x}<1\;\Rightarrow\;e^{-x}<e^{0}\;\Rightarrow\;-x<0\;\Rightarrow\;x>0.$$

Таким чином, область $x\in(0,+\infty)$ є областю абсолютної збіжності досліджуваного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{2n^2}$.

***Приклад* 3.3.** Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9^n+n}{(x+1)^{2n}}$.

Розв'язання. Доданки даного ряду визначені при $x\neq-1$. Враховуючи те, що $(x+1)^{2n}>0$ $(2n$ – парний степінь$)$, ряд з абсолютних величин не змінить свого вигляду відносно початкового ряду.

Знайдемо $|u_n(x)|$, $|u_{n+1}(x)|$:

$$|u_n(x)|=\frac{9^n+n}{(x+1)^{2n}},$$

$$|u_{n+1}(x)|=\frac{9^{n+1}+n+1}{(x+1)^{2(n+1)}}=\frac{9\cdot9^n+n+1}{(x+1)^{2n+2}}=\frac{9\cdot9^n+n+1}{(x+1)^{2n}\cdot(x+1)^2},$$

і застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9\cdot9^n+n+1}{(x+1)^{2n}\cdot(x+1)^2}\Big/\frac{9^n+n}{(x+1)^{2n}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(9\cdot 9^n+n+1\right)\cancel{\left(x+1\right)^{2n}}}{\cancel{\left(x+1\right)^{2n}}\cdot\left(x+1\right)^2\left(9^n+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{9^n}\cdot\left(9+\dfrac{n+1}{9^n}\right)}{\left(x+1\right)^2\cdot\cancel{9^n}\cdot\left(1+\dfrac{n}{9^n}\right)}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{9^n}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+1\right)'}{\left(9^n\right)'}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{9^n\cdot\ln 9}=0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{9^n}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n\right)'}{\left(9^n\right)'}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{9^n\cdot\ln 9}=0\end{array}\right\|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{\left(x+1\right)^2}=\frac{9}{\left(x+1\right)^2}<1\,.$$

За ознакою Даламбера ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{9^n+n}{\left(x+1\right)^{2n}}$ збігається, якщо $\dfrac{9}{\left(x+1\right)^2}<1$, і розбігається, якщо $\dfrac{9}{\left(x+1\right)^2}>1$.

Розв’яжемо нерівність $\dfrac{9}{\left(x+1\right)^2}<1$:

$$\frac{1}{\left(x+1\right)^2}<\frac{1}{9}\ \Rightarrow\ \left(x+1\right)^2>9\ \Rightarrow\ \left|x+1\right|>3\ \Rightarrow\ \begin{cases}x+1>3,\\ x+1<-3;\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}x>2,\\ x<-4;\end{cases}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x\in\left(-\infty,-4\right)\cup\left(2,+\infty\right).$$

Отже, заданий ряд збігається абсолютно при $x\in\left(-\infty,-4\right)\cup\left(2,+\infty\right)$ і розбігається всередині інтервала $-4<x<2$. Дослідимо поведінку функціонального ряду на межах інтервала збіжності. В даному прикладі, внаслідок симетрії відносно прямої $x=-1$, при підстановці в початковий ряд значень $x=2$ і $x=-4$ отримаємо два абсолютно однакові додатні ряди, тобто:

при $x=2$: $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{9^n+n}{(2+1)^{2n}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{9^n+n}{3^{2n}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{9^n+n}{9^n}$,

при $x=-4$: $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{9^n+n}{(-4+1)^{2n}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{9^n+n}{(-3)^{2n}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{9^n+n}{3^{2n}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{9^n+n}{9^n}$.

Обчислимо границю загального члена цього ряду при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9^n+n}{9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9^n+n}{9^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{9^n}\cdot\left(1+\dfrac{n}{9^n}\right)}{\cancel{9^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{9^n}\right)=$$

$$=\left\|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{9^n}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n)'}{\left(9^n\right)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{9^n\cdot\ln 9}=0\right\|=1\neq 0 .$$

Таким чином, отримали, що для даного ряду не виконано необхідну ознаку збіжності, з чого випливає розбіжність ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{9^n+n}{9^n}$. Отже, $x=2$ та $x=-4$ не входять в область збіжності ряду.

Остаточно отримаємо область збіжності функціонального ряду: даний ряд збігається при $x\in(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$ (рис. 1).

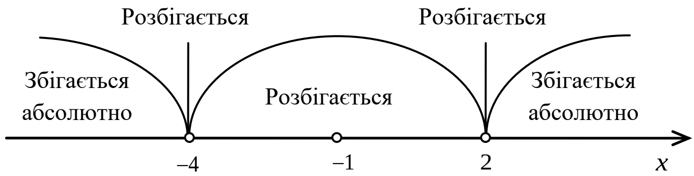

Рисунок 1

4. Степеневі ряди

4.1. Степеневий ряд і його область збіжності

Степеневим рядом називається функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n = a_1 \left(x - x_0\right) + a_2 \left(x - x_0\right)^2 + \ldots + a_n \left(x - x_0\right)^n + \ldots, \quad (4.1)$$

визначений на послідовності степеневих функцій вигляду $\left\{a_n \left(x - x_0\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$, де $x_0 \in \mathbb{R}$, а $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ − послідовність дійсних чисел.

Зокрема, при $x_0 = 0$ степеневий ряд має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots. \quad (4.2)$$

Степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ збігається в точці $x = x_0$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ збігається в точці $x = 0$.

Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ збігається в деякій точці $x = x_1 \neq 0$, то він збігається абсолютно при всіх x таких, що $\left|x - x_0\right| < \left|x_1\right|$. Якщо ж цей степеневий ряд розбігається в деякій точці $x = x_2$, то він розбігається при всіх x таких, що $\left|x - x_0\right| > \left|x_2\right|$.

Наслідки.

Для степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ існує таке додатне число R, яке називається радіусом збіжності, і для якого є справедливими наступні твердження:

1) при всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < R$, ряд збігається абсолютно;

2) при всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| > R$, ряд розбігається.

Для визначення радіуса збіжності степеневого ряду можна скористатися однією з формул:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{4.3}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{4.4}$$

Область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ має вигляд інтервала $(x_0 - R,\, x_0 + R)$, де R − радіус збіжності. Зокрема, для степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ область збіжності $(-R, R)$.

Якщо $R = 0$, то степеневий ряд збігається лише в точці x_0. Якщо $R = \infty$, то степеневий ряд збігається абсолютно на всій числовій осі. В точках $x = x_0 \pm R$ (на межах інтервала збіжності) ряд може збігатися, а може розбігатися. Ці точки потрібно дослідити додатково.

***Приклад* 4.1.** Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}(x-2)^n$.

Розв'язання. Заданий ряд є степеневим рядом з $x_0 = 2$ і $a_n = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$.

Знайдемо a_{n+1} і застосуємо формулу (4.3) для знаходження радіуса збіжності:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1+1)^2}{(n+1+1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)!\cdot(n+2)},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{{(n+1)^2}\big/{(n+1)!}}{{(n+2)^2}\big/{(n+1)!\cdot(n+2)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot\cancel{(n+1)!}\cdot(n+2)}{(n+2)^2\cdot\cancel{(n+1)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot(n+2)}{(n+2)^2} = \left\|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = 1\right\| = \lim_{n\to\infty}(n+2) = \infty .$$

Звідси випливає, що ряд збігається на всій числовій осі, тобто для всіх $x \in \mathbb{R}$.

***Приклад* 4.2.** Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+5)^3}(x-2)^n$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо степеневий ряд з $x_0 = 2$ і $a_n = \frac{n^n}{(n+5)^3}$.

Скористаємося формулою (4.4) для знаходження радіуса збіжності:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{(n+5)^3}}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+5)^3}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)^{3/n}}{n} =$$

$$= \left\|\lim_{n\to\infty}(n+5)^{3/n} = 1\right\| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 .$$

Звідси випливає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+5)^3}(x-2)^n$ збігається в єдиній точці $x = 2$.

***Приклад* 4.3.** Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(x-3)^n}{4^{2+n}\cdot\sqrt{3n-1}}$.

Розв'язання. За умовами задачі маємо степеневий ряд з $x_0 = 3$ і $a_n = \dfrac{(-1)^n}{4^{2+n}\cdot\sqrt{3n-1}}$ $\left(|a_n| = \dfrac{1}{4^{2+n}\cdot\sqrt{3n-1}}\right)$.

Знайдемо $|a_{n+1}|$ і застосуємо формулу (4.3) для знаходження радіуса збіжності:

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{4^{2+n+1}\cdot\sqrt{3(n+1)-1}} = \frac{1}{4\cdot 4^{2+n}\cdot\sqrt{3n+2}},$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1\Big/4^{2+n}\cdot\sqrt{3n-1}}{1\Big/4\cdot 4^{2+n}\cdot\sqrt{3n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\cancel{4^{2+n}}\cdot\sqrt{3n+2}}{\cancel{4^{2+n}}\cdot\sqrt{3n-1}} =$$

$$= 4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{3n-1}} = 4\cdot 1 = 4.$$

Розв'яжемо нерівність $|x-3| < 4$:

$$|x-3| < 4 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x-3 < 4, \\ x-3 > -4; \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x < 7, \\ x > -1; \end{cases} \;\Rightarrow\; -1 < x < 7.$$

Отже, заданий ряд в інтервалі $-1 < x < 7$ збігається абсолютно. Ряд розбігається, коли $x \in \mathbb{R}\setminus(-1,7)$. Дослідимо поведінку степеневого ряду на межах інтервала збіжності, порядок яких зручніше вибирати так, щоб перший для досліджування ряд виявився знакододатним.

При $x = -1$ отримаємо наступний знакододатний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{4^{2+n}\cdot\sqrt{3n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1-3)^n}{4^{2+n}\cdot\sqrt{3n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-4)^n}{4^2\cdot 4^n\cdot\sqrt{3n-1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-1)^n\cdot\cancel{4^n}}{4^2\cdot\cancel{4^n}\cdot\sqrt{3n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+n}}{16\sqrt{3n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{16\sqrt{3n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16\sqrt{3n-1}}.$$

Для досліджування збіжності даного ряду застосуємо ознаку порівняння.

$$0 < a_n = \frac{1}{16\sqrt{3n-1}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{16\sqrt{3n}} = \frac{1}{16\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{n^{1/2}} = \frac{1}{16\sqrt{3}} \cdot b_n .$$

Оскільки узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ розбігається $\left(p = \frac{1}{2} < 1\right)$, то $\frac{1}{16\sqrt{3}} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ також розбігається. Звідси, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16\sqrt{3n-1}}$ розбігається за ознакою порівняння, отже, межа інтервала $x = -1$ не входить в область збіжності ряду.

При $x = 7$ отримаємо наступний знакопереміжний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(7-3)^n}{4^{2+n} \cdot \sqrt{3n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cancel{4^n}}{4^2 \cdot \cancel{4^n} \cdot \sqrt{3n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16 \cdot \sqrt{3n-1}} .$$

Знакододатний ряд (з його абсолютних величин):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{16 \cdot \sqrt{3n-1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16 \cdot \sqrt{3n-1}} \quad \left(a_n = \frac{1}{16 \cdot \sqrt{3n-1}} > 0 \right)$$

розбігається. Застосуємо ознаку Лейбніца.

За ознакою Лейбніца, оскільки

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{16 \cdot \sqrt{3n-1}} = 0$;

2) $a_n = \frac{1}{16 \cdot \sqrt{3n-1}}$, $a_{n+1} = \frac{1}{16 \cdot \sqrt{3n+2}} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16 \cdot \sqrt{3n-1}}$ збігається умовно, звідси, межа інтервала $x = 7$ входить в область збіжності ряду.

Отже, область збіжності степеневого ряду – інтервал $\left(-1,7\right]$ (рис. 2).

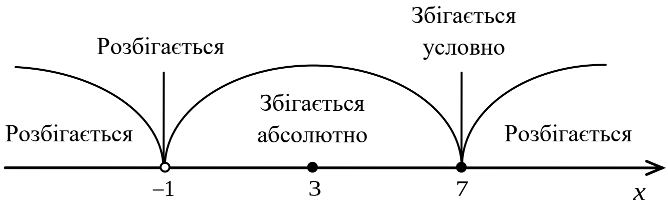

Рисунок 2

Приклад **4.4.** Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \mathrm{tg}\,\dfrac{1}{n^2}$.

Розв'язання. Задано степеневий ряд з $x_0 = 0$ і $a_n = \mathrm{tg}\,\dfrac{1}{n^2}$.

Знайдемо a_{n+1} і застосуємо формулу (4.3) для знаходження радіуса збіжності:

$$a_{n+1} = \mathrm{tg}\,\frac{1}{\left(n+1\right)^2} \, ,$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{tg}\,\frac{1}{n^2}}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{\left(n+1\right)^2}} = \left\| \begin{array}{l} \text{при } n\to\infty \\ \mathrm{tg}\,\dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n^2} \\ \mathrm{tg}\,\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2} \sim \dfrac{1}{\left(n+1\right)^2} \end{array} \right\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2}{1/\left(n+1\right)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)^2}{n^2} = 1 \, .$$

Звідси $|x|<1$ або $-1<x<1$. Ряд розбігається, коли $|x|>1$.

Дослідимо поведінку заданого степеневого ряду на межах інтервала збіжності.

При $x=1$ отримаємо наступний знакододатний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \mathrm{tg}\,\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n \cdot \mathrm{tg}\,\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\,\frac{1}{n^2}\ .$$

Даний ряд збігається за ознакою порівняння, оскільки

$$0<a_n = \mathrm{tg}\,\frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} = b_n\,,$$

де узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ збігається } \left(p=2<1\right).$$

Отже, межа інтервала $x=1$ входить в область збіжності ряду.

При $x=-1$ отримаємо наступний знакопереміжний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \mathrm{tg}\,\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^n \cdot \mathrm{tg}\,\frac{1}{n^2}\ .$$

Знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(-1\right)^n \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\,\frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}\,\frac{1}{n^2}$$

збігається. Отже, знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^n \cdot \mathrm{tg}\,\frac{1}{n^2}$ збігається абсолютно. Звідси, межа інтервала $x=-1$ також входить в область збіжності ряду.

Остаточно маємо область збіжності степеневого ряду: $x \in [-1, 1]$ (рис. 3).

Рисунок 3

4.2. Операції над степеневими рядами

1) Множення степеневого ряду на сталий множник здійснюється, як для будь-якого збіжного ряду, шляхом множення кожного доданка на цей множник:

$$C \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C \cdot a_n x^n \quad (C = \text{const}). \tag{4.5}$$

2) Припустимо, що радіуси збіжності рядів $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ відмінні від нуля. Тоді на інтервалі $|x| < R$, де R − меньший з цих радіусів, можна додавати, віднімати і множити ці ряди по правилах для алгебраїчних многочленів:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n , \tag{4.6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{, де } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} . \tag{4.7}$$

3) Частку від ділення степеневих рядів можна зобразити у вигляді степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ , \tag{4.8}$$

якщо тільки коефіцієнт b_1 є відмінним від нуля. В противному випадку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ в точці $x = 0$ обертається в нуль. Коефіцієнти c_k можна отримати з умови (4.8). Тоді, згідно з $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, тобто $a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k}$, отримаємо наступну рекурентну систему рівностей:

$$\begin{aligned} &a_0 = c_0 b_0 \,, \\ &a_1 = c_0 b_1 + c_1 b_0 \,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k} \,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4.9}$$

З першого рівняння знайдемо $c_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$, з другого $c_1 = \dfrac{a_1 - c_0 b_1}{b_0}$ і так далі.

5. Ряд Тейлора і ряд Маклорена

5.1. Основні означення

Зображення функції у вигляді степеневого ряду називається розкладом функції в степеневий ряд. Загальне правило розкладання функції в ряд по степенях $\left(x-x_0\right)$ дається рядом Тейлора:

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)}{1!}\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n, \qquad (5.1)$$

а по степенях x – рядом Маклорена:

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+\frac{f'\left(0\right)}{1!}x+\frac{f''\left(0\right)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n. \qquad (5.2)$$

Обидва ці ряди збігаються до функції $f\left(x\right)$ для всіх значень x, при яких залишковий член $R_n\left(x\right)\to 0$ при $n\to\infty$.

Коефіцієнти a_n ряду Тейлора і ряду Маклорена визначаються по формулах, відповідно:

$$a_0=f\left(x_0\right),\ a_1=\frac{f'\left(x_0\right)}{1!},\ a_2=\frac{f''\left(x_0\right)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}, \qquad (5.3)$$

$$a_0=f\left(0\right),\ a_1=\frac{f'\left(0\right)}{1!},\ a_2=\frac{f''\left(0\right)}{2!},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}. \qquad (5.4)$$

5.2. Розклад основних елементарних функцій в ряд Маклорена

В багатьох випадках розклад функції в степеневий ряд просто отримати, якщо використовувати стандартні розклади.

Нижче наведено розклади основних елементарних функцій в ряд Маклорена і області збіжності для отриманих рядів.

1) $$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ x\in\mathbb{R};\tag{5.5}$$

2) $$a^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\cdot(\ln a)^n}{n!}=1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{x^2\ln^2 a}{2!}+\ldots+\frac{x^n\ln^n a}{n!}+\ldots,\ x\in\mathbb{R};\tag{5.6}$$

3) $$\operatorname{sh}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ x\in\mathbb{R};\tag{5.7}$$

4) $$\operatorname{ch}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ x\in\mathbb{R};\tag{5.8}$$

5) $$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ x\in\mathbb{R};\tag{5.9}$$

6) $$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}\ldots,\ x\in\mathbb{R};\tag{5.10}$$

7) $$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\ |x|<1;\tag{5.11}$$

8) біноміальний ряд:

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}C_\alpha^n\cdot x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+\ldots,\tag{5.12}$$

де $C_\alpha^0=1$, $C_\alpha^n=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\notin\mathbb{N}$, $|x|<1$.

При $\alpha=n\in\mathbb{N}$ функція $f(x)=(1+x)^n$ розкладається за біномом Ньютона в многочлен, і розклад є вірним на всій числовій осі.

При $\alpha = -1$ (окремий випадок біноміального ряда) $(1+x)^{-1} = \dfrac{1}{1+x}$.

9) $$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n \cdot x^n + \ldots, \quad |x| < 1; \qquad (5.13)$$

10) $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1; \qquad (5.14)$$

11) $$\frac{1-x}{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 2x^n = 1 - 2x + 2x^2 + \ldots + (-1)^n \cdot 2x^n + \ldots, \quad |x| < 1; \qquad (5.15)$$

12) $$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2x^n = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \ldots + 2x^n + \ldots, \quad |x| < 1; \qquad (5.16)$$

13) $$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad |x| < 1 \qquad (5.17)$$

(при $x = 1$ маємо умовну збіжність ряду);

14) $$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad |x| < 1 \qquad (5.18)$$

при $x = -1$ маємо умовну збіжність ряду);

15) $$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \ldots + \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad |x| < 1. \qquad (5.19)$$

Слід пам'ятати, що при розкладанні тригонометричних функцій в ряд Маклорена або Тейлора, аргумент x беруть у радіанній, а не в градусній мірі.

***Приклад* 5.1.** Розкласти в ряд Тейлора функцію $f(x) = \dfrac{1}{x}$ при $x = -6$.

Розв'язання. Обчислимо значення даної функції та її похідних при $x = x_0 = -6$:

$$f(x) = x^{-1} \qquad f(-6) = -\frac{1}{6}$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} \qquad f'(-6) = -\frac{1!}{6^2}$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3} \qquad f''(-6) = -\frac{2!}{6^3}$$

$$f'''(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4} \qquad f'''(-6) = -\frac{3!}{6^4}$$

………………………..   ………………….

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-n-1} \qquad f^{(n)}(-6) = -\frac{n!}{6^{n+1}}$$

………………………..   ………………….

Підставляючи ці значення в ряд Тейлора для довільної функції, отримаємо

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{6} - \frac{1!}{6^2 1!}(x+6) - \frac{2!}{6^3 2!}(x+6)^2 - \frac{3!}{6^4 3!}(x+6)^3 - \ldots - \frac{n!}{6^{n+1} n!}(x+6)^n - \ldots =$$

$$= -\left(1 + \frac{(x+6)}{6^2} + \frac{(x+6)^2}{6^3} + \frac{(x+6)^3}{6^4} + \ldots + \frac{(x+6)^n}{6^{n+1}} + \ldots\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{6^{n+1}}.$$

Дослідимо збіжність отриманого ряду за радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x+6|^n}{6^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+6|}{6^{1+\frac{1}{n}}} = \left\| \text{при } n \to \infty : \frac{1}{n} \to 0 \right\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x+6|}{6} = \frac{|x+6|}{6}.$$

Якщо ця границя менша за одиницю, ряд збігається. Звідси $\frac{|x+6|}{6} < 1$. Розв'язуючи цю нерівність, знаходимо інтервал збіжності ряду $-12 < x < 0$.

Межі цього інтервала дослідимо окремо. Підставляючи в ряд $x=0$, Потім $x=-12$, отримаємо числові ряди, відповідно:

$$1+1+1+1+1+1+1+1+...;$$

$$1-1+1-1+1-1+1-1+...,$$

які розбігаються, тому що для них не виконується визначення збіжності ряду. (Для першого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ часткова сума $S_n = n$, тому $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$, для другого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ не існує $\lim_{n\to\infty} S_n$). Звідси, значення $x=0$, $x=-12$ не входять в область збіжності ряду.

Отже, інтервалом збіжності отриманого ряду Тейлора для даної функції є $(-12,0)$.

***Приклад* 5.2.** Використовуючи стандартні розклади, розкласти в ряд Тейлора функцію $f(x)=\ln(3-5x)$ по степенях $(x+4)$.

Розв'язання. Перетворимо початкову функцію, використовуючи властивості логарифма:

$$\ln(3-5x)=\ln(3-5(x+4-4))=\ln(3+20-5(x+4))=$$

$$=\ln(23-5(x+4))=\ln\left[23\cdot\left(1-\frac{5}{23}(x+4)\right)\right]=\ln 23+\ln\left(1-\frac{5}{23}(x+4)\right).$$

Скористаємося розкладом $\ln(1-t)=-t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}-...-\frac{t^{n+1}}{n+1}+...=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}$,

поклавши $t=\frac{5}{23}(x+4)$. Оскільки даний розклад є справедливим на інтервалі $-1\le t<1$, то розклад

$$\ln(3-5x)=\ln 23-\frac{5}{23}(x+4)-\frac{1}{2}\cdot\frac{5^2}{23^2}(x+4)^2-\frac{1}{3}\cdot\frac{5^3}{23^3}(x+4)^3-\ldots$$

$$\ldots-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{5^{n+1}}{23^{n+1}}(x+4)^{n+1}+\ldots=\ln 23-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{n+1}(x+4)^{n+1}}{23^{n+1}(n+1)}=$$

$$=\ln 23-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x+4)^n}{23^n(n+1)}$$

є справедливим на інтервалі $-1\le\frac{5}{23}(x+4)<1$ або $-\frac{43}{5}\le x<\frac{3}{5}$. Тобто, для отриманого ряду Тейлора $\ln(3-5x)=\ln 23-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(x+4)^n}{23^n(n+1)}$ область збіжності – $x\in\left[-\frac{43}{5},\frac{3}{5}\right)$ $\left(\text{при } x\in\left(-\frac{43}{5},\frac{3}{5}\right)\right.$ – збіжність абсолютна, а при $\left.x=-\frac{43}{5}-\text{збіжність умовна}\right)$.

***Приклад* 5.3.** Користуючись розкладом функції $f(x)=\sqrt{x^2+1}\cdot\sin^2 x$ в ряд Тейлора, знайти значення похідної $f^{(4)}(0)$.

Розв'язання. Перетворимо дану функцію:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}\cdot\sin^2 x=\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{1/2}\cdot(1-\cos 2x).$$

Далі застосуємо стандартний розклад

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot t^{2n}}{(2n)!}\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^{2n}}{(2n)!},$$

поклавши в ньому $t=2x$, отримаємо наступний ряд:

$$(1-\cos 2x)=1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=1-1+\frac{2^2x^2}{2!}-\frac{2^4x^4}{4!}+\frac{2^6x^6}{6!}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=$$

$$=\frac{2^2x^2}{2!}-\frac{2^4x^4}{4!}+\frac{2^6x^6}{6!}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}.$$

Для розкладу $\left(x^2+1\right)^{1/2}$ застосуємо стандартний ряд:

$$(1+t)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{\alpha}^{n}\cdot t^n=1+\alpha t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}t^n+\ldots,$$

Поклавши в цьому $t=x^2$ і $\alpha=\dfrac{1}{2}$, маємо:

$$\sqrt{x^2+1}=\left(1+x^2\right)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(x^2\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(x^2\right)^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}\left(x^2\right)^n+\ldots=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^6-\ldots$$

Тоді для функції $f(x)=\sqrt{x^2+1}\cdot\sin^2 x$ отримаємо розклад:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}\cdot\sin^2 x=\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{1/2}\cdot(1-\cos 2x)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^4+\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^6-\ldots\right)\cdot\left(\frac{2^2x^2}{2!}-\frac{2^4x^4}{4!}+\frac{2^6x^6}{6!}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{2}{2!}x^2+\left(\frac{1}{2!}-\frac{2^3}{4!}\right)x^4+\ldots.$$

Коефіцієнти ряду Тейлора знайдемо за формулою (5.3) $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$,

Тоді $f^{(n)}(x_0)=a_n\cdot n!$.

Оскільки $x_0 = 0$, то формула для знаходження коефіцієнтів ряду Тейлора приймає вигляд: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \;\Rightarrow\; f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$.

З отриманого розкладу видно, що коефіцієнт

$$a_4 = \frac{1}{2!} - \frac{2^3}{4!} = \frac{3\cdot 4}{4!} - \frac{2^3}{4!} = \frac{12-8}{4!} = \frac{4}{4!}.$$

В результаті значення похідної $f^{(4)}(0)$ для заданої функції:

$$f^{(4)}(0) = \frac{4}{\cancel{4!}} \cdot \cancel{4!} = 4.$$

5.3. Деякі застосування рядів Тейлора

Ряди широко застосовуються при наближених обчисленнях, зокрема, для обчислення з заданою точністю значень різних функцій і визначених інтегралів, для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь тощо. Розглянемо деякі з них.

***Приклад* 5.4.** Обчислити $\sqrt{3}$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Розв'язання. Скористаємося біноміальним рядом

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}t^n + \ldots.$$

Як видно з даного розкладу, швидкість його збіжності зменьшується з наближенням значень $|t|$ до одиниці. Тому перетворення, яке призводить до прискорення збіжності, полягає у виборі $|t|$ таким, щоб воно було якомога меньшим за одиницю, наприклад,

$$\sqrt{3}=\sqrt{\frac{48}{16}\cdot\frac{49}{49}}=\frac{7}{4}\sqrt{\frac{48}{49}}=\frac{7}{4}\frac{1}{\sqrt{\frac{49}{48}}}=\frac{7}{4}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{48}}}=\frac{7}{4}\left(1+\frac{1}{48}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Тоді, згідно з вищезазначеним розкладом, де $t=\frac{1}{48}$, $\alpha=-\frac{1}{2}$, маємо:

$$\sqrt{3}=\frac{7}{4}\left(1+\frac{1}{48}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{7}{4}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{48}+\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\frac{1}{48^2}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{7}{4}\left(1-\frac{1}{96}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2304}+\ldots\right)=1,75\cdot(1-0,01042+0,00016+\ldots)=$$

$$=1,75\cdot(1-0,01042+0,00016+\ldots)=1,75-0,01823+0,00028+\ldots.$$

Звідси видно, що вже третій доданок, який дорівнює $0,00028$, меньший, ніж $0,001$. Враховуючи, що ряд знакопереміжний, можна стверджувати, що залишок ряду не буде перевищувати модуля цього значення. Але тоді достатньо взяти два доданки, отже

$$\sqrt{3}\simeq 1,75\left(1-\frac{1}{96}\right)\simeq 1,73177\simeq 1,732.$$

***Приклад* 5.5.** Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{1/2}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$ з точністю $\varepsilon=10^{-3}$.

Розв'язання. Користуючись розкладом в ряд

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,$$

та інтегруючи обидві частини рівності в межах від 0 до $\frac{1}{2}$, будемо мати:

$$\int_0^{1/2}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx=\int_0^{1/2}\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\right)dx=$$

$$=\int_0^{1/2}\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{5}\frac{x^5}{5}-\frac{1}{7}\frac{x^7}{7}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{25}-\frac{x^7}{49}+\ldots\right)\Bigg|_0^{1/2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{9\cdot 2^3}+\frac{1}{25\cdot 2^5}-\frac{1}{49\cdot 2^7}+\ldots=$$

$$=0{,}5-0{,}013(8)+0{,}00125-0{,}000159+\ldots\,.$$

Останній (четвертий) доданок $\frac{1}{49\cdot 2^7}<0{,}001$. Оскільки ряд знакозмінний, то залишок не перевищує модуля першого відкинутого члена. Отже, для обчислення даного інтеграла з точністю до $0{,}001$ достатньо взяти три перших доданки:

$$\int_0^{1/2}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx\simeq 0{,}5-0{,}013(8)+0{,}00125\simeq 0{,}487\,.$$

***Приклад* 5.6.** Знайти три перших відмінних від нуля члена розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'=x^2+y^2$, яке задовольняє початкову умову $y(0)=1$.

Розв'язання. Запишемо шуканий розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння у вигляді степеневого ряду Маклорена, використовуючи формулу (5.2):

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}\cdot x+\frac{y''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots\,. \qquad (5.20)$$

Знайдемо послідовно $y(0)$, $y'(0)$ і $y''(0)$. З початкової умови випливає, що

$$y(0)=1.$$

Безпосередньо з диференціального рівняння $y' = x^2 + y^2$ знаходимо, що

$$y'(0) = 0^2 + y^2(0) = 1.$$

Диференціюючи обидві частини рівняння, отримаємо

$$y'' = 2x + 2y \cdot y'.$$

Звідси

$$y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot y(0) \cdot y'(0) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Підставляючи знайдені значення похідних у (5.20), отримаємо шуканий розклад

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \ldots = 1 + x + x^2 + \ldots = 1 + x + x^2.$$

6. Ряд Фур'є для функції, заданої на довільному проміжку

Функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+\left(a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}\right)+\left(a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}\right)+\ldots=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (6.1)$$

де $l>0$, a_0, a_n, b_n $(n\in\mathbb{N})$ − сталі, називається тригонометричним рядом.

Всі члени тригонометричного ряду – синуси і косинуси кутів, кратних $\frac{\pi x}{l}$, та його сума $S(x)$, якщо вона існує, є періодична функція від x з періодом $2l$; $S(x)=S(x+2l)$.

Розкладання функцій в тригонометричний ряд вивчає розділ математики, який називається гармонічним аналізом.

Рядом Фур'є для функції $f(x)$ в проміжку $[-l,l]$ називається тригонометричний ряд вигляду (6.1), якщо його коефіцієнти a_n і b_n обчислені за формулами:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx, \qquad (6.2)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n\in\mathbb{N}, \qquad (6.3)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n\in\mathbb{N}. \qquad (6.4)$$

Найпростіші достатні умови розкладності функції в ряд Фур'є сформульовані в наступній теоремі Діріхлє.

Якщо в проміжку $[-l,l]$ функція $f(x)$ має скінченну кількість точок розриву першого роду (або є неперервною), то її ряд Фур'є збігається, тобто має суму $S(x)$, у всіх точках цього проміжка. При цьому:

1) в точках неперервності функції $f(x)$ він збігається до цієї функції, $S(x)=f(x)$;

2) в кожній точці розриву x_k $(k\in\mathbb{Z})$ функції – до півсуми однобічних границь функції, зліва та справа,

$$S(x_k)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_k-0} f(x)+\lim_{x\to x_k+0} f(x)\right), \tag{6.5}$$

тобто

$$S(x_k)=\frac{1}{2}\left(f(x_k-0)+f(x_k+0)\right); \tag{6.6}$$

3) в обох межових точках проміжка $[-l,l]$ − до півсуми однобічних границь функції при наближенні x до цих точок зсередини проміжка,

$$S(-l)=S(l)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -l+0} f(x)+\lim_{x\to l-0} f(x)\right), \tag{6.7}$$

тобто

$$S(-l)=S(l)=\frac{1}{2}\left(f(-l+0)+f(l-0)\right). \tag{6.8}$$

Для парної функції $f(x)=f(-x)$ всі коефіцієнти $b_n=0$, і відповідний ряд Фур'є не містить синусів:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\,, \qquad (6.9)$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx\,,\quad n=0,1,2,\ldots. \qquad (6.10)$$

Для непарної функції $f(x)=-f(-x)$ всі коефіцієнти $a_n=0$, і відповідний ряд Фур'є містить тільки синуси:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\,, \qquad (6.11)$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx\,,\quad n=0,1,2,\ldots. \qquad (6.12)$$

***Приклад* 6.1.** Для заданої графічно функції (рис. 4):

1) записати аналітичний вираз функції $f(x)$;

2) розкласти цю функцію в тригонометричний ряд Фур'є;

3) знайти $S(-l)$, $S(+l)$, а також значення $S(x)$ в точках розриву функції $f(x)$, якщо вони є;

4) побудувати графік суми $S(x)$ отриманого ряду.

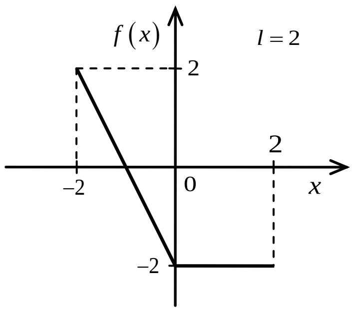

Рисунок 4

Розв'язання

1) Задамо функцію, графік якої зображено на рисунку 4, аналітично. Спочатку відмітимо, що вона визначена тільки на відрізку $\left[-l,l\right]=\left[-2,2\right]$. Очевидно, що на проміжку $\left[0,2\right]$ функція є сталою, і всі її значення є рівними -2, тобто $f\left(x\right)=-2$ при $x\in\left[0,2\right]$. На інтервалі $\left[-2,0\right)$ графік функції є відрізком прямої L, яка проходить через точки $\left(0,-2\right)$ і $\left(-2,2\right)$. Рівняння прямої на площині, яка проходить через дві дані точки $\left(x_1,y_1\right)$ і $\left(x_2,y_2\right)$, має вигляд:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Підставивши в це рівняння величини $x_1=0$, $x_2=-2$, $y_1=-2$, $y_2=2$:

$$\frac{y+2}{2+2}=\frac{x-0}{-2-0}\ \Rightarrow\ \frac{y+2}{4}=\frac{x-0}{-2}\ \Rightarrow\ \frac{y+2}{-2}=\frac{x}{1}\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ y+2=-2x\ \Rightarrow\ y=-2x-2,$$

отримаємо рівняння $y=-2\left(x+1\right)$ прямої L в координатах x, y.

Остаточно, аналітичне завдання даної функції буде мати наступний вигляд:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}-2\left(x+1\right), & -2\le x<0;\\ -2, & 0\le x\le 2.\end{cases}$$

2) Побудуємо загальний тригонометричний ряд Фур'є:

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

де $n\in\mathbb{N}$, $l=2>0$ $\left(T=2l=4\ -\right.$ довжина проміжка $\left.\left[-2,2\right]\right)$.

Обчислимо коефіцієнти a_0, a_n, b_n, де $n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(\int_{-2}^{0}\left(-2(x+1)\right)dx + \int_{0}^{2}(-2)\,dx\right) =$$

$$= \int_{0}^{-2}(x+1)\,dx - \int_{0}^{2}dx = \frac{1}{2}(x+1)^2\Big|_0^{-2} - x\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left((-2+1)^2 - (0+1)^2\right) - (2-0) = \frac{1}{2}(1-1) - 2 = 0 - 2 = -2\,;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\int_{-2}^{0}\left(-2(x+1)\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_{0}^{2}(-2)\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right) =$$

$$= \int_{0}^{-2}(x+1)\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_{0}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ u = (x+1),\;\; du = dx; \quad dv = \cos\frac{n\pi x}{2}dx,\;\; v = \frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2} \end{array} \right\| =$$

$$= (x+1)\cdot\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^{-2} - \int_{0}^{-2}\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx - \frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^{2} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cdot(x+1)\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^{-2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^{-2} - \frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^{2} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cdot\left((-2+1)\cdot\sin\frac{n\pi(-2)}{2} - (0+1)\cdot\sin\frac{n\pi\cdot 0}{2}\right) +$$

$$+ \frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{n\pi(-2)}{2} - \cos\frac{n\pi\cdot 0}{2}\right) - \frac{2}{n\pi}\cdot\left(\sin\frac{n\pi 2}{2} - \sin\frac{n\pi\cdot 0}{2}\right) =$$

$$=\frac{2}{n\pi}\cdot\left(\underbrace{-\sin(-n\pi)-\sin 0}_{0}\right)+\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos(-n\pi)-\underset{1}{\cos 0}\right)-$$

$$-\frac{2}{n\pi}\cdot\left(\underbrace{\sin(n\pi)-\sin 0}_{0}\right)=\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}-1\right)=\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\left((-1)^n-1\right)=$$

$$=\begin{cases}0, \ n=2m, \ m\in\mathbb{N};\\ \dfrac{-8}{(2m-1)^2\pi^2}, \ n=2m-1, \ m\in\mathbb{N};\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\int_{-2}^{0}\left(-2(x+1)\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\right)dx+\int_{0}^{2}(-2)\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\int_{0}^{-2}(x+1)\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx-\int_{0}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\int u\,dv=uv-\int v\,du;\\ u=(x+1), \ du=dx;\\ dv=\sin\dfrac{n\pi x}{2}dx, \ v=-\dfrac{2}{n\pi}\cdot\cos\dfrac{n\pi x}{2}\end{array}\right\|=$$

$$=(x+1)\cdot\left(-\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_{0}^{-2}-\int_{0}^{-2}\left(-\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\right)dx+$$

$$+\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{0}^{2}=\frac{2}{n\pi}(x+1)\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{-2}^{0}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_{0}^{-2}+$$

$$+\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2=\frac{2}{n\pi}\left(\left(0+1\right)\cdot\cos\frac{n\pi\cdot 0}{2}-\left(-2+1\right)\cdot\cos\frac{n\pi\left(-2\right)}{2}\right)+$$

$$+\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\left(\sin\frac{n\pi\left(-2\right)}{2}-\sin\frac{n\pi\cdot 0}{2}\right)+\frac{2}{n\pi}\cdot\left(\cos\frac{n\pi 2}{2}-\cos\frac{n\pi\cdot 0}{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(\underbrace{\cos 0}_{1}+\underbrace{\cos\left(-n\pi\right)}_{(-1)^n}\right)+\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\sin\left(-n\pi\right)-\sin 0}_{0}\right)+$$

$$+\frac{2}{n\pi}\cdot\left(\underbrace{\cos\left(n\pi\right)}_{(-1)^n}-\underbrace{\cos 0}_{1}\right)=\frac{2}{n\pi}\left(1+\left(-1\right)^n\right)+\frac{2}{n\pi}\cdot\left(\left(-1\right)^n-1\right)=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\cdot\left(1+\left(-1\right)^n+\left(-1\right)^n-1\right)=\frac{2}{n\pi}\cdot 2\left(-1\right)^n=\frac{\left(-1\right)^n\cdot 4}{n\pi}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4}{2m\pi}, & n=2m,\ m\in\mathbb{N};\\ -\dfrac{4}{\left(2m-1\right)\pi}, & n=2m-1,\ m\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Випишемо знайдений ряд Фур’є:

$$f\left(x\right)=\frac{-2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\left(\left(-1\right)^n-1\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{\left(-1\right)^n\cdot 4}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\right)=$$

$$=-1+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\left(-1\right)^n-1\right)}{n^2}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}$$

або, після перетворень,

$$f\left(x\right)=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8}{\left(2n-1\right)^2\pi^2}\cdot\cos\frac{\left(2n-1\right)\pi x}{2}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2n\pi}\cdot\sin\frac{2n\pi x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2n-1)\pi}\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}=$$

$$=-1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\sin(n\pi x)-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2},$$

$x\neq 2+4k \quad (k\in\mathbb{Z})$.

3) Графік суми даного ряду зображено на рис. 5. Графік суми ряду і графік даної функції відрізняються точками з абсцисами $x_k=2+4k$ $(k\in\mathbb{Z})$. У графіка даної функції ординати цих точок є рівними (-2), а у графіка суми ряду вони дорівнюють 0.

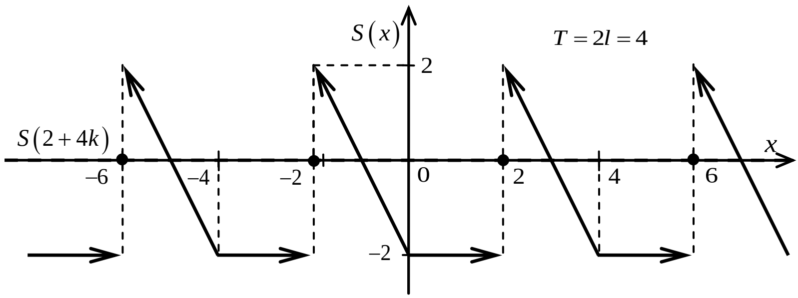

Рисунок 5

4) Отриманий розклад даної функції є справедливим у всій області неперервності даної функції: в інтервалі $[-2,0)$ сума ряду $S(x)=-2(x+1)$, а в інтервалі $[0,2)$ – $S(x)=-2$, окрім значень $x_k=2+4k$ $(k\in\mathbb{Z})$. В точках розриву $x_k=2+4k$ $(k\in\mathbb{Z})$, де функція не визначена:

$$S(2+4k)=\frac{f(2+4k-0)+f(2+4k+0)}{2}=\frac{f(2-0)+f(2+0)}{2}=\frac{-2+2}{2}=0$$

де $f(2-0)=-2$, $f(2+0)\le 2$.

Відмітимо, що точки $x_k = 4k \quad (k\in\mathbb{Z})$ є точками неперервності функції $S(x)$. Внаслідок періодичності функції достатньо встановити неперервність $f(x)$ в точці $x_0=0$. Це випливає зі співвідношення $f(x_k-0)=f(x_k+0)=f(x_k)$. Для даної функції отримаємо $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ або $f(-0)=f(+0)=f(0)=-2$.

***Приклад* 6.2.** Для заданої графічно функції (рис. 6):

1) записати аналітичний вираз функції $f(x)$;

2) розкласти цю функцію в тригонометричний ряд Фур'є;

3) знайти $S(-l)$, $S(+l)$, а також значення $S(x)$ в точках розриву функції $f(x)$, якщо вони є;

4) побудувати графік суми $S(x)$ отриманого ряду.

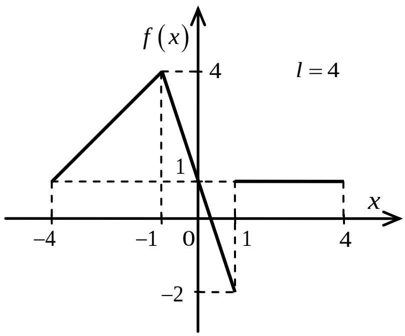

Рисунок 6

Розв'язання

1) Задамо функцію, графік якої зображено на рисунку 6, аналітично. Перш за все, відмітимо, що вона визначена тільки на відрізку $[-l,l]=[-4,4]$. Очевидно, що на проміжку $[1,4]$ функція є сталою і всі її значення є рівними 1, тобто $f(x)=1$ при $x\in[1,4]$. На інтервалі $[-4,-1)$ графік функції є відрізком прямої L_1, яка проходить через точки $(-4,1)$ і $(-1,4)$. На інтервалі $[-1,1)$ графік функції є відрізком прямої L_2, яка проходить через точки $(0,1)$ і $(-1,4)$.

Рівняння прямої на площині, яка проходить через дві дані точки (x_1,y_1) і (x_2,y_2) має вигляд:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Підставивши в це рівняння величини $x_1=-4$, $x_2=-1$, $y_1=1$, $y_2=4$:

$$\frac{y-1}{4-1}=\frac{x+4}{-1+4} \Rightarrow \frac{y-1}{3}=\frac{x+4}{3} \Rightarrow y-1=x+4$$

отримаємо рівняння $y=x+5$ прямої L_1 в координатах x, y.

Аналогічно отримуємо рівняння прямої L_2: $y=-3x+1$.

Остаточно аналітичне завдання даної функції буде мати наступний вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} x+5, & -4\le x<-1; \\ -3x+1, & -1\le x<1; \\ 1, & 1\le x\le 4. \end{cases}$$

2) Побудуємо загальний тригонометричний ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

де $n\in\mathbb{N}$, $l=4>0$ $\left(T=2l=8 - \text{довжина проміжка } [-4,4]\right)$.

Обчислимо коефіцієнти a_0 , a_n , b_n , де $n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\cdot\left(\int_{-4}^{-1}(x+5)\,dx + \int_{-1}^{1}(-3x+1)\,dx + \int_{1}^{4} 1\cdot dx\right) =$$

$$= \left\| d(-3x+1) = -3dx,\ -\frac{1}{3}d(-3x+1) = dx \right\| =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\int_{-4}^{-1}(x+5)\,dx - \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(-3x+1)\,d(-3x+1) + \int_{1}^{4} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\left.\frac{(x+5)^2}{2}\right|_{-4}^{-1} - \frac{1}{3}\cdot\left.\frac{(-3x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{1} + x\Big|_1^4\right) = \frac{1}{8}\Big((-1+5)^2 - (-4+5)^2\Big) -$$

$$-\frac{1}{24}\Big((-3+1)^2 - (3+1)^2\Big) + \frac{1}{4}(4-1) = \frac{1}{8}(16-1) - \frac{1}{24}(4-16) + \frac{1}{4}(4-1) =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 15 - \frac{1}{24}\cdot(-12) + \frac{1}{4}\cdot 3 = \frac{1}{8}(15+4+6) = \frac{1}{8}\cdot 25 = \frac{25}{8}\ ;$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\int_{-4}^{-1}(x+5)\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx + \int_{-1}^{1}(-3x+1)\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx + \int_{1}^{4}\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx\right) =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ u_1 = (x+5),\ du_1 = dx;\ u_2 = (-3x+1),\ du_2 = -3dx \\ dv = \cos\frac{n\pi x}{4}\,dx,\ \ v = \frac{4}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{4} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\left.(x+5)\cdot\frac{4}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{4}\right|_{-4}^{-1} - \int_{-4}^{-1}\frac{4}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\left(-3x+1\right)\cdot\frac{4}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{4}\bigg|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{4}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{4}\cdot\left(-3\right)dx\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{4}\bigg|_{1}^{4}=\frac{1}{n\pi}\cdot\left(x+5\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{4}\bigg|_{-4}^{-1}-\frac{4}{n^2\pi^2}\left(-\cos\frac{n\pi x}{4}\right)\bigg|_{-4}^{-1}+$$

$$+\frac{1}{n\pi}\cdot\left(-3x+1\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{4}\bigg|_{-1}^{1}+\frac{3\cdot 4}{n^2\pi^2}\cdot\left(-\cos\frac{n\pi x}{4}\right)\bigg|_{-1}^{1}+\frac{1}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{4}\bigg|_{1}^{4}=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(\left(-1+5\right)\cdot\sin\frac{-n\pi}{4}-\left(-4+5\right)\cdot\sin\frac{-4n\pi}{4}\right)+$$

$$+\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{-n\pi}{4}-\cos\frac{-4n\pi}{4}\right)+$$

$$+\frac{1}{n\pi}\cdot\left(\left(-3+1\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{4}-\left(3+1\right)\cdot\sin\frac{-n\pi}{4}\right)-$$

$$-\frac{3\cdot 4}{n^2\pi^2}\cdot\left(\cos\frac{n\pi}{4}-\cos\frac{-n\pi}{4}\right)+\frac{1}{n\pi}\cdot\left(\sin\frac{4n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(-4\cdot\sin\frac{n\pi}{4}+\underbrace{\sin\left(n\pi\right)}_{0}\right)+\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-\underbrace{\cos\left(n\pi\right)}_{\left(-1\right)^n}\right)+$$

$$+\frac{1}{n\pi}\cdot\left(-2\cdot\sin\frac{n\pi}{4}+4\cdot\sin\frac{n\pi}{4}\right)-\frac{3\cdot 4}{n^2\pi^2}\cdot\left(\underbrace{\cos\frac{n\pi}{4}-\cos\frac{n\pi}{4}}_{0}\right)+$$

$$+\frac{1}{n\pi}\cdot\left(\underbrace{\sin\left(n\pi\right)}_{0}-\sin\frac{n\pi}{4}\right)=-\cancel{\frac{4}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{\left(-1\right)^n\cdot 4}{n^2\pi^2}-$$

$$-\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}+\cancel{\frac{4}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}}-\frac{1}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-(-1)^n\right)-\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}\ ;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\int_{-4}^{-1}(x+5)\cdot\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx+\int_{-1}^{1}(-3x+1)\cdot\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx+\int_{1}^{4}\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx\right)=$$

$$=\left\|\begin{array}{c}\int u\,dv=uv-\int v\,du\\ u_1=(x+5),\ du_1=dx;\ u_2=(-3x+1),\ du_2=-3dx\\ dv=\sin\frac{n\pi x}{4}dx,\quad v=-\frac{4}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}\end{array}\right\|=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\left.(x+5)\cdot\frac{4}{n\pi}\cdot\left(-\cos\frac{n\pi x}{4}\right)\right|_{-4}^{-1}-\int_{-4}^{-1}\frac{4}{n\pi}\cdot\left(-\cos\frac{n\pi x}{4}\right)dx\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\left(\left.(-3x+1)\cdot\frac{4}{n\pi}\cdot\left(-\cos\frac{n\pi x}{4}\right)\right|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{4}{n\pi}\cdot\left(-\cos\frac{n\pi x}{4}\right)\cdot(-3)\,dx\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{n\pi}\cdot\left.\left(-\cos\frac{n\pi x}{4}\right)\right|_{1}^{4}=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\cdot(x+5)\cdot\left.\cos\frac{n\pi x}{4}\right|_{-4}^{-1}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\left.\sin\frac{n\pi x}{4}\right|_{-4}^{-1}-$$

$$-\frac{1}{n\pi}\cdot(-3x+1)\cdot\left.\cos\frac{n\pi x}{4}\right|_{-1}^{1}-\frac{3\cdot 4}{n^2\pi^2}\cdot\left.\sin\frac{n\pi x}{4}\right|_{-1}^{1}-\frac{1}{n\pi}\cdot\left.\cos\frac{n\pi x}{4}\right|_{1}^{4}=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left((-1+5)\cdot\cos\frac{-n\pi}{4}-(-4+5)\cdot\cos\frac{-4n\pi}{4}\right)+$$

$$+\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\left(\sin\frac{-n\pi}{4}-\sin\frac{-4n\pi}{4}\right)-\frac{1}{n\pi}\left((-3+1)\cdot\cos\frac{n\pi}{4}-(3+1)\cdot\cos\frac{-n\pi}{4}\right)-$$

$$-\frac{3\cdot 4}{n^2\pi^2}\cdot\left(\sin\frac{n\pi}{4}-\sin\frac{-n\pi}{4}\right)-\frac{1}{n\pi}\cdot\left(\cos\frac{4n\pi}{4}-\cos\frac{n\pi}{4}\right)=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left(4\cdot\cos\frac{n\pi}{4}-\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}\right)+\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\left(-\sin\frac{n\pi}{4}+\underbrace{\sin(n\pi)}_{0}\right)-$$

$$-\frac{1}{n\pi}\left(-2\cdot\cos\frac{n\pi}{4}-4\cdot\cos\frac{n\pi}{4}\right)-\frac{3\cdot 4}{n^2\pi^2}\cdot\left(\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}\right)-$$

$$-\frac{1}{n\pi}\cdot\left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}-\cos\frac{n\pi}{4}\right)=-\frac{4}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}+\cancel{\frac{(-1)^n}{n\pi}}-\frac{4}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}+$$

$$+\frac{6}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{6\cdot 4}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}-\cancel{\frac{(-1)^n}{n\pi}}+\frac{1}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}=$$

$$=\frac{3}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{7\cdot 4}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}=\frac{3}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{28}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}\ .$$

Випишемо знайдений ряд Фур'є:

$$f(x)=\frac{25/8}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-(-1)^n\right)-\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{28}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{4}\right]=$$

$$=\frac{25}{16}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}-(-1)^n\right)-\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{4}\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}-\frac{28}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}\right)\cdot\sin\frac{n\pi x}{4}\right].$$

3) Графік суми даного ряду зображено на рис. 7. Графік суми ряду і графік даної функції відрізняються точками з абсцисами $x_k = 1 + 8k$. У графіка даної функції ординати цих точок є рівними 1, а у графіка суми ряду вони дорівнюють $-\dfrac{1}{2}$.

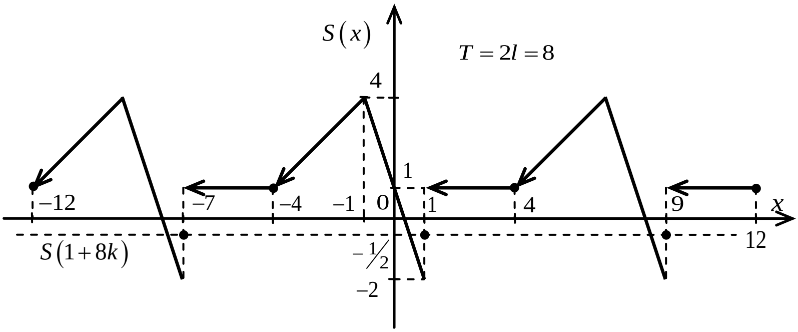

Рисунок 7

4) Отриманий розклад даної функції є справедливим у всій області неперервності даної функції: в інтервалі $(-4,-1)$ сума ряду $S(x) = x + 5$, в інтервалі $[-1,1)$: $S(x) = -3x + 1$, а в інтервалі $(1,4)$ – $S(x) = 1$, окрім значень $x_k = 1 + 8k$ $(k \in \mathbb{Z})$. В точках розриву $x_k = 1 + 8k$ $(k \in \mathbb{Z})$, де функція не визначена,

$$S(1+8k) = \frac{f(1+8k-0) + f(1+8k+0)}{2} = \frac{f(1-0) + f(1+0)}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2},$$

де $f(1-0) = -2$, $f(1+0) = 1$.

Відмітимо, що точки $x = \pm l$ є точками неперервності функції $S(x)$. Причому, внаслідок періодичності функції $f(-l) = f(+l)$ і значення суми $S(\pm l) = f(l)$, тобто

$$S(\pm l) = f(l), \; S(\pm 4) = f(4) = 1.$$

Для точок $x_k = -1+8k$ $(k \in \mathbb{Z})$ достатньо встановити неперервність $f(x)$ в точці $x_0 = -1$. Це випливає з співвідношення

$$f(x_k - 0) = f(x_k + 0) = f(x_k).$$

Для даної функції

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \text{ або } f(-1-0) = f(-1+0) = f(-1) = 4.$$

В точках $x = -4+8k$ маємо також точки неперервність функції $S(x)$ тому, що

$$S(-4+8k) = \frac{f(-4+8k-0) + f(-4+8k+0)}{2} = \frac{f(-4-0) + f(-4+0)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Тобто виконується визначення неперервності функції $S(x)$ в точці $x = -4+8k$:

$$S(-4+8k-0) = S(-4+8k+0) = S(-4+8k).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособ. для вузов / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 384 с.

2. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 1. / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 343 с.

3. Задачник по курсу математического анализа : в 2 ч. Ч. 2. / Виленкин Н. Я., Бохан К. А., Марон И. А. и др.; под ред. Н. Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – 336 с.

4. Ильин В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. I. / / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. – М. : Наука, 1971. –600 с.

5. Ильин В. А. Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. II. / / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк; под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова. – М. : Наука, 1973. – 448 с.

6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 1. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – 712 с.

7. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 2. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – 576 с.

8. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : в 3 т. Т. 3. / / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1989. – 352 с.

9. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1984. – 592 с.

10. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. Функции нескольких переменных / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1986. – 528 с.

11. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. Интегралы. Ряды / Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М. : Наука, 1994. – 496 с.

12. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 1. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1990. – 270 с.

13. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 2. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1991. – 352 с.

14. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учеб. пособ. : в 3 т. Т. 3. / Рябушко А. П., Баршатов В. В., Державец В. В., Юруть И. Е.; под ред. А. П. Рябушко. – Мн. : Высш. шк., 1991. – 288 с.

15. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : у 2 ч. Ч. І. / Ю. М. Сенчук. – Х. : НТУ «ХПІ», 2004. – 408 с.

16. Сенчук Ю. Ф. Математичний аналіз для інженерів : навч. посіб. : у 2 ч. Ч. ІІ. / Ю. М. Сенчук. – Х. : НТУ «ХПІ», 2006. – 408 с.

17. Заболоцький М. В. Математичний аналіз / М. В. Заболоцький, О. Г. Сторож, С. І. Тарасюк. – К. : Знання, 2008. – 421 с.

18. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 1. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1966. – 608 с.

19. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 2. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1988. – 800 с.

20. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 3. / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969. – 653 с.

Навчальне видання

Ахієзер Олена Борисівна, **Геляровська** Оксана Анатоліївна,
Дунаєвська Ольга Ігорівна, **Галуза** Олексій Анатолійович,
Москалець Наталя Василівна

Методичні вказівки до індивідуальних завдань з вищої математики за темою «Ряди» для студентів заочної та дистанційної форм навчання

для студентів усіх спеціальностей
вищих технічних навчальних закладів

За загальною редакцією **Ахієзер** Олена Борисівна

Роботу до видання рекомендував М.І. Безменов

Редактор М. П. Ефремова

План 2015 р., поз. 172

Підп.до друку 2016 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Ум. друк. арк. 5,1
Наклад 50 прим. Зам. № Ціна договірна

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21.